HY Todennäköisyysteoria, syksy 2013, laskuharjoitukset 1 (11.9.2013)

1. Olkoon Ω mielivaltainen joukko, 2^Ω merkitsee sen potenssijoukko, eli Ω:n alijoukkojen kokoelma. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

   $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \in A$ vai $\omega \in B$ mutta ei molemmissa $\}$

   Näytä että potenssijoukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

   - Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
   - Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
   - osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,
   - osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

   Vihje : indikaattorille pätee

   $$\mathbf{1}_{(A\Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2$$

Ratkaisu.

$A, B, C \in 2^\Omega$.

$(2^\Omega, \Delta)$ on vaihdannainen ryhmä, jos

- $A\Delta B \in 2^\Omega$.
- Δ liitännäinen:
  $$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$
- $\exists$ 1-alkio 1_Δ, jolle
  $$1_\Delta \Delta A = A\Delta 1_\Delta = A$$
- $\exists -A \in 2^\Omega$:
  $$A\Delta(-A) = (-A)\Delta A = 1_\Delta$$
- Δ vaihdannainen.

$(2^\Omega, \Delta, \cap)$ on rengas, kun

- $(2^\Omega, \Delta)$ on vaihdannainen ryhmä:
- $A \cap B \in 2^\Omega$
- $\cap$ liitännäinen

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- $\exists$ 1-alkio $1_\cap$

$$1_\cap \cap A = A \cap 1_\cap = A$$

- Osittelulait:

$$A \cap (B \Delta C) = A \cap B \Delta A \cap C \quad (A \Delta B) \cap C = A \cap C \Delta B \cap C$$

Määritelmien kohdat järjestyksessä:

- Operaatiot $\Delta, \cap$ suljettuja.
- Δ on liitännäinen koska summa modulo 2 on

  $$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv_2 (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B) + \mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A + (\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C) \equiv_2 \mathbf{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$$

  jossa $\equiv_2$ merkki on yhtäsuuruus modulo 2.
- $1_\Delta := \emptyset$:

$$\mathbf{1}_{A\Delta\emptyset} \equiv_2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_\emptyset = \mathbf{1}_A$$

- $A \Delta A = \emptyset$, siis jokainen joukko on oman inverssi Δ:n suhteen.
- Δ on vaihdannainen

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} \equiv_2 \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \equiv_2 \mathbf{1}_{B\Delta A}$$

- $\cap$ on liitännäinen ja vaihdannainen

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{(A\cap B)\cap C} = (\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{A\cap(B\cap C)}\\ &A \cap B = B \cap A\end{aligned}$$

- $\cap$ operaation identiteetti on Ω, $\Omega \cap A = A$
- $\cap$ ja Δ ovat distributiivisia

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B\Delta C} \equiv_2 \mathbf{1}_A\big(\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C\big) =\\ &\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} \equiv_2 \mathbf{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}\end{aligned}$$

2. Olkoon $\{\mathcal{G}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ saman joukon Ω:n σ-algebrien kokoelma jossa $\mathcal{I}$ on mielivaltainen indeksi joukko.

   Osoita että leikkaus

$$\mathcal{G} := \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_\alpha$$

   on σ-algebra.

   Ratkaisu.

   - $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ koska $\mathcal{G}_\alpha$ on σ-algebra. Siis $\Omega, \emptyset \in \mathcal{G}$.
   - Jos $A \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ myös komplementti $A^c \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$, siis $A^c \in \mathcal{G}$ kun $A^c \in \mathcal{G}$.
   - Jos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$ myös $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{I}$, siis $A \in \mathcal{G}$ kun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{G}$.

3. Todista väitteet:

   Mielivaltainen π(vastaavasti d)-luokkien, leikkaus on π(vastaavasti d)-luokka. Eli

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{D}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka, ja

$$\pi(\mathcal{C}) = \bigcap_{\pi\text{-luokat } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{J}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka. Myös

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\sigma\text{-algebrat } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}$$

   on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä σ-algebra.

   Ratkaisu.

   i) $d(\mathcal{C})$ on d-luokka. Määritelmän vaatimukset:
      - $\Omega \in \mathcal{D}$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \Longrightarrow \Omega \in d(\mathcal{C})$

- $A, B \in d(\mathcal{C})$ siten, että $A \subseteq B$. Tästä $A, B \in \mathcal{D}$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \implies B \backslash A \in D$ jokaisella d-luokalla $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C} \iff B \backslash A \in d(\mathcal{C})$
- Olkoon $A_n \in d(\mathcal{C})$, $n \in \mathbb{N}$ monotonisesti kasvava jono ja $A_n \uparrow A$ eli $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Jono A_n kuluu jokaiseen $\mathcal{D}$ ja määritelmän nojalla $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on jokaisen $\mathcal{D}$ alkio, josta seuraa, että $A \in d(\mathcal{C})$

ii) $d(\mathcal{C})$ on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä d-luokka: Jos $\mathcal{D}_0 \supseteq \mathcal{C}$ on d-luokka, niin

$$d(\mathcal{C}) = \bigcap_{d\text{-luokat } \mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_0 \, .$$

iii) $\pi(\mathcal{C})$ on π-luokka: $A, B \in \pi(\mathcal{C}) \Rightarrow A, B \in \mathcal{J}$ jokaisella π-luokalla $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J}$ jokaisella π-luokalla $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \pi(\mathcal{C})$.

iv) $\pi(\mathcal{C})$ on pienin $\mathcal{C}$:n sisältävä π-luokka: samoin, kuin toinen kohta.

v) Tehtävässä 2 jo osoitettu, että $\sigma(\mathcal{C})$ on σ-algebra. Se, että se on pienin, menee samoin kuin toisessa kohdassa d-luokalle.

4. Olkoon $E \subseteq \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$ kokoelma osajoukoista

$$(a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}$$

jossa $n \in \mathbb{N}$ and $a_i, b_i \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)$, jossa

$$-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq +\infty,$$

Osoita että $\mathcal{E}$ on algebra, mutta ei ole σ-algebra.

Ratkaisu.

Merkitään $A_i := (a_i, b_i]$ ja toiselle jonolle

$$-\infty \leq c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \cdots \leq c_m \leq d_m \leq +\infty,$$

$B_j = (c_j, d_j]$. Joukot $A, B \in \mathcal{E}$, jos

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{n} A_i \\ B &= \sum_{j=1}^{m} B_j, \end{aligned} \tag{0.1}$$

missä summa-merkintä tarkoittaa erillisten joukkojen unionia.

Todennetaan määritelmän ehdot:

i) $\Omega = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = (-\infty, \infty] \in \mathcal{E}$, $\emptyset = (a, a] \in \mathcal{E}$ mielivaltaiselle a.

ii) $A_i^c = (-\infty, a_i] \cup (b_i, \infty] \in \mathcal{E}$.
Selvästi kun $A \in \mathcal{E}$ on olemassa esitys jolla

$$A = (a_1, b_1] \cup (a_2, b_2] \cup \cdots \cup (a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty\},\ b_i \in \mathbb{R} \cup \{ +\infty\}$$

ja $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Silloin

$$A^c = (-\infty, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \cdots \cup (b_{n-1}, a_n] \cup (b_n, +\infty]$$

jossa mahdollisesti $(a, b] = \emptyset$ kun $a \geq b$.

iii) Äärellisen unionin (äärellisen leikkauksen) kuuluttava joukkoon $\mathcal{E}$. Jos A, B kuten (0.1), niin leikkaukselle on: Ensiksi $A_i \cap B_j = (a, b] \in \mathcal{E}$, missä

$$\begin{aligned} a &= \max(a_i, c_j) \\ b &= \min(b_i, d_j) \end{aligned}$$

Jos $a \geq b$, leikkaus on tyhjä joukko $\emptyset \in \mathcal{E}$.

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j).$$

Koska $B_j \cap B_k = \emptyset$, kun $j \neq k$ on

$$(A_i \cap B_j) \bigcap (A_i \cap B_k) = \emptyset$$

ja

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j).$$

Samoin, koska $A_i \cap A_j = \emptyset$ on

$$(\sum_k A_i \cap B_k) \bigcap (\sum_k A_j \cap B_k) = \emptyset,$$

ja

$$A \cap B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (A_i \cap B_j) \in \mathcal{E}.$$

$\mathcal{E}$ ei ole suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen. Jokainen joukko $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}] \in \mathcal{E}$, mutta $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1) \notin \mathcal{E}$.

5. Olkoon $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ saman tapahtumien joukon Ω:n kasvava algebrojen jono, jossa $A_{n+1} \supseteq A_n$.

   Osoita että yhdiste

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$$

   on algebra.

   Jos korvataan "algebrat" "σ-algebroilla" tämä väite ei välttämättä päde, esitä vastaesimerkki.

   Ratkaisu.

   - Selvästi $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$.
   - Kun $A, B \in \mathcal{A}$, on olemassa $\bar{n}$ jolle $A, B \in \mathcal{A}_n$ kun $n \geq \bar{n}$, tästä seuraa $(A \cup B) \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ ja $(A \cap B) \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$.
   - $\mathcal{A}$ ei ole välttämättä σ-algebra,

     Esimerkki:

     Olkoon $\Omega = [0, 1)$ ja

$$\mathcal{A}_n = \sigma\{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}), k = 0, \ldots, 2^n - 1\},$$

     $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.

     Joukko

$$\begin{aligned}(0,1) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) \\ &= [\frac{1}{2}, 1) \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup \ldots,\end{aligned}$$

     missä ensimmäinen joukko $\in \mathcal{A}_1$, toinen $\in \mathcal{A}_2$, jne. Siis $(0,1) \in \sigma(\cup_n \mathcal{A}_n)$. Mutta $(0, 1)$ ei kuulu mihinkään joukkoon $\mathcal{A}_n$, eikä siten niiden yhdisteeseen.

6. Olkoon $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^\Omega$ alijoukkojen jono.

   Osoita:

$$\limsup_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \qquad \text{jossa } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Ratkaisu.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \limsup_n A_n \Leftrightarrow \\
&\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n \text{ s.e } \omega \in A_k \Leftrightarrow \\
&\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n \text{ s.e } \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \\
&\lim_n \sup_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \notin \limsup_n A_n \Leftrightarrow \\
&\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.e } \forall\, k \geq n \quad \omega \notin A_k \Leftrightarrow \\
&\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ s.e } \forall\, k \geq n \quad \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0 \Leftrightarrow \\
&\lim_n \sup_{k \geq n} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = 0.
\end{aligned}
$$