HELSINGIN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
57705 Todennäköisyyslaskenta
Erilliskoe 20.3.2014

Sallitut apuvälineet: laskin, MAOL-taulukkokirja sekä itse käsin kirjoitettu, enintään A4-kokoinen lunttilappu.

1. Eräässä kokeessa onnistumistodennäköisyys on luku p (jolle $0 < p < 1$). Koetta toistetaan riippumattomasti, kunnes on onnistuttu r kertaa, missä $r \geq 1$ on jokin annettu kokonaisluku. Olkoon Y sen kokeen järjestysluku, jolla onnistutaan r:nnen kerran (kun ensimmäisen kokeen järjestysluku on yksi). Määritellään lisäksi, että X on epäonnistumisten lukumäärä.

   Johda lauseke satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktiolle (ptnf). Selitä huolellisesti, mihin lauseke perustuu. Selitä myös, miten X:n ptnf saadaan laskettua Y:n ptnf:n nojalla.

2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, ja kummallakin on tasajakauma välillä $(0, 1)$. Olkoon Z sen origokeskisen ympyrän pinta-ala, jonka kaari kulkee pisteen (X, Y) kautta. (Ympyrän pinta-ala $Z = \pi R^2$, ja ympyrän säde $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.)

   Laske EZ ja $\operatorname{var} Z$.

3. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

   $$f_{X,Y}(x, y) = 8xy, \qquad \text{kun } 0 < x < y < 1,$$

   ja nolla muualla. Laske muuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktiot, ehdolliset tiheysfunktiot $f_{X|Y}$ ja $f_{Y|X}$ sekä ehdolliset odotusarvot $E[X \mid Y = y]$ ja $E[Y \mid X = x]$. Kaikissa lausekkeissa muista ilmoittaa lausekkeen pätevyysalue.

4. Olkoot U ja V riippumattomia välillä $(0, 1)$ tasajakautuneita satunnaismuuttujia. Määritellään satunnaismuuttujat X ja Y kaavoilla

   $$X = V, \qquad Y = U/V.$$

   Johda X:n ja Y:n yhteistiheysfunktio sekä Y:n reunatiheysfunktio.

5. Olkoot X_1, X_2 ja X_3 riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla kaikilla on normaalijakauma $N(0, 1)$. Määritellään niiden otoskeskiarvo kaavalla

   $$\overline{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} X_i$$

   ja residuaalit kaavalla

   $$R_i = X_i - \overline{X}.$$

   Johda
   (a) otoskeskiarvon jakauma (nimi ja parametrit, tiheysfunktiota ei tarvita)
   (b) satunnaismuuttujan R_1 jakauma (nimi ja parametrit)
   (c) satunnaisvektorin (R_1, R_2, R_3) jakauma (nimi ja parametrit).