Todennäköisyyslaskennan kurssi, loppukoe 22.10.2013

Kokeessa saa käyttää MAOL-taulukkokirjaa

1. Bernoullin kokeessa joko onnistutaan tai epäonnistutaan, ja onnistumistodennäköisyys yhdessä kokeessa on $0 < p < 1$. Bernoullin koetta toistetaan riippumattomasti, kunnes onnistutaan r kertaa, jossa $r \geq 1$ on jokin annettu kokonaisluku. Olkoon Y sen toiston järjestysluku, jolla onnistutaan r:nnen kerran (kun ensimmäisen toiston järjestysluku on yksi). Määritellään lisäksi, että X on epäonnistumisten lukumäärä, ennenkuin onnistutaan r:nnen kerran.

Johda lauseke satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktiolle (ptnf). Selitä myös, miten X:n ptnf saadaan laskettua Y:n ptnf:n nojalla.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia välin $(0,1)$ tasajakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia. Olkoon Z sen origokeskeisen ympyrän pinta-ala, jonka kaari kulkee pisteen (X,Y) kautta. (Ympyrän pinta-ala $Z = \pi R^2$, ja ympyrän säde $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$).

Laske EZ ja $\operatorname{var} Z$.

3. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \qquad \text{kun } 0 < x < y < 1,$$

ja nolla muualla. Laske muuttujien X ja Y reunajakaumien tiheysfunktiot, ehdolliset tiheysfunktiot $f_{X|Y}$ sekä $f_{Y|X}$ sekä ehdolliset odotusarvot $E[X \mid Y = y]$ ja $E[Y \mid X = x]$.

4. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = EY = 1$. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y.$$

Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio. Laske lisäksi satunnaismuuttujan U reunatiheysfunktio.

5. Olkoon satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ n-ulotteinen normaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen matriisi (eli $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ kaavalla

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\mathbf{X}.$$

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kahtia siten, että vektori $\mathbf{U} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista $(1 \leq k < n)$ ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \ldots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T \mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mikä on satunnaismuuttujan Z_1 reunajakauma? Mikä on satunnaismuuttujan Z_2 reunajakauma?