Todennäköisyyslaskenta, erilliskoe 22.10.2012

Kokeessa saa käyttää MAOL-taulukoita

1. Edessäsi on kaksi identtistä laatikkoa. Toinen niistä sisältää 10 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–10 ja toinen sisältää 25 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–25. Valitset laatikoista satunnaisesti yhden ja sen jälkeen poimit valitusta laatikosta satunnaisesti yhden pallon.

a) Millä todennäköisyydellä poimit pallon, jonka numero on seitsemän?

b) Millä todennäköisyydellä valitsemassasi laatikossa oli alunperin 25 palloa, jos poimimasi pallon numero on seitsemän?

2. Olkoot X ja Y kaksi riippumatonta Poissonin jakaumaa noudattavaa satunnaismuuttujaa siten, että $EX = \lambda$ ja $EY = \mu$. Todista, että summalla $X + Y$ on myös Poissonin jakauma.

3. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X \mid Y &\sim N(0, \mathrm{e}^Y) \\ Y &\sim \mathrm{U}(0,1). \end{aligned}$$

$N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2, ja $\mathrm{U}(a,b)$ on välin (a,b) tasajakauma.

Anna konkreettinen kaava satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktiolle. Anna kaava X:n reunajakauman tiheysfunktiolle integraalina. (Integraalia ei tarvitse sieventää). Laske EX ja $\operatorname{var} X$.

4. Olkoot $R > 0$ ja $0 < T < 2\pi$ satunnaismuuttujia, joilla on jatkuva yhteisjakauma. Oletamme, että satunnaismuuttujat

$$X = R\cos T, \qquad Y = R\sin T$$

ovat riippumattomia ja että niillä on molemmilla normaalijakauma $N(0,1)$. Johda satunnaismuuttujien R ja T yhteistiheysfunktio. Laske lisäksi R:n reunatiheysfunktio sekä T:n reunatiheysfunktio.

5.

a) Selitä, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että symmetrinen matriisi $\mathbf{C}$ on *positiivisesti semidefiniitti.* (2 pistettä)

b) Olkoon $\mathbf{C}$ satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ kovarianssimatriisi, $\mathbf{C} = \operatorname{Cov}\mathbf{X}$. Kirjoita matriisille $\mathbf{C}$ määritelmä odotusarvona. Todista lisäksi, että $\mathbf{C}$ on symmetrinen ja positiivisesti semidefiniitti matriisi. (4 pistettä)