Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta
1. kurssikoe 18.10.2013
Ratkaisuehdotuksia / Hoa Ngo ja Jukka Kohonen

1. Noppaa heitetään 6 kertaa.
   (a) Olkoon X saatujen parillisten ja Y parittomien tulosten lukumäärä. Ilmoita kummankin satunnaismuuttujan jakauma (jakauman nimi ja parametrit) sekä odotusarvo.
   (b) Laske $P(X=2, Y=4)$.
   (c) Mikä on todennäköisyys, että kukin mahdollinen tulos $1, \ldots, 6$ saadaan kerran?

Ratkaisu. (a) Molemmat satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat binomijakaumaa parametrein 6 ja $\frac{1}{2}$ eli $X, Y \sim \text{Bin}(6, \frac{1}{2})$. Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvo on täten

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

(b) Satunnaisvektori (X, Y) noudattaa multinomijakaumaa $\text{Mult}(6, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, joten

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 4) = \binom{6}{2, 4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\frac{1}{2}\Big)^4 = \frac{6!}{2!4!}\frac{1}{2^6} = \frac{15}{64} \approx 0,23.$$

(c) Olkoon satunnaismuuttuja N_i silmäluvun $i \in \{1, 2, ..., 6\}$ lukumäärä 6-kertaisessa toistokokeessa. Tällöin $(N_1, N_2, \ldots, N_6) \sim \text{mult}(6, (p_1, p_2, \ldots, p_6)$, missä $p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6}$. Kysytty todennäköisyys saadaan suoraan multinimomijakauman määritelmästä

$$\begin{aligned} f(1, 1, 1, 1, 1, 1) &= \mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1, ...N_6 = 1) \\ &= \binom{6}{1, 1, 1, 1, 1, 1} p_1 \cdot p_2 \cdots p_6 = \frac{6!}{1!1!1!1!1!1!} \cdot \Big(\frac{1}{6}\Big)^6 = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}015. \end{aligned}$$

Tapa 2. Merkitään kysytty tapahtuma

$$A = \text{'kukin mahdollinen tulos } 1, \ldots, 6 \text{ saadaan kerran'}.$$

Tällöin tuloperiaatteen nojalla

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}015.$$

Huomautus. *Satunnaismuuttujat X ja Y eivät ole riippumattomia, ainoastaan heitot ovat.*

2. Olkoon X:llä jatkuva jakauma tiheysfunktiolla

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{kun } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   (a) Ratkaise vakion c arvo.
   (b) Laske EX.
   (c) Laske $\text{var}\, X$.

Ratkaisu. (a) Jotta f on tiheysfunktio, sen on oltava ei-negatiivinen ja sen integraalin on oltava yksi (Lause 2.9). Ei-negatiivisuus toteutuu kun $c \geq 0$. Integraaliehto toteutuu jos ja vain jos

$$1 = \int_{-1}^{1} cx^2 = c \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = c \cdot \frac{1}{3}(1^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3}c,$$

eli täsmälleen silloin kun $c = \frac{3}{2}$.

(b) Määritelmän 4.2 mukaisesti

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{2}x^2 dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^3 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1^4 - (-1)^4) = 0.$$

Tämän voi myös päätellä tiheysfunktion symmetrisyydestä origon suhteen, mutta se on tehtävä täsmällisesti.

(c) Koska $EX = 0$, niin määritelmän 4.4 ja lauseen 4.5 mukaisesti

$$\operatorname{var} X = E[(X - EX)^2] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^4 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot (1^5 - (-1)^5) = \frac{3}{5}.$$

3. Bussit 1 ja 2 ohittavat tietyn pysäkin toisistaan riippumatta ajanhetkillä X_1 ja X_2, jotka ovat kumpikin tasajakautuneet välillä $(0, 4)$, yksikkönä minuutti. Herra K voi matkustaa yhtä hyvin kummalla tahansa bussilla.
   (a) Herra K saapuu pysäkille hetkellä 2. Mikä on todennäköisyys, että hän ehtii bussiin (ts. ainakaan molemmat bussit eivät ole vielä menneet)?
   (b) Milloin herra K:n tulisi saapua pysäkille, jotta hän ehtii bussiin todennäköisyydellä 0.9?

Ratkaisu. (a) Olkoon herra K:n saapumishetki $t \in [0, 4]$. Tällöin herra K ehtii bussiin täsmälleen silloin, kun bussi 1 ohittaa pysäkin hetkellä $X_1 \in (t, 4]$ tai bussi 2 ohittaa pysäkin hetkellä $X_2 \in (t, 4]$ (tai molemmat). Tämän tapahtuman todennäköisyys on satunnaismuuttujien riippumattomuuksien ja sama jakautuneisuuden nojalla

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathbb{P}\big(\text{'K ehtii bussiin'}\big) \\ &= \mathbb{P}(\{X_1 \in (t, 4]\} \cup \{X_2 \in (t, 4]\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \le t, X_2 \le t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \le t)\mathbb{P}(X_2 \le t) \\ &= 1 - F(t)^2 \\ &= 1 - \Big(\frac{1}{4}t\Big)^2 \\ &= 1 - \frac{t^2}{16}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $t = 2$ saadaan kysytty todennäköisyys

$$p(2) = 1 - \frac{2^2}{16} = 1 - \frac{4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

(b) Ratkaistaan kysytty aika t yhtälöstä:

$$\begin{aligned} p(t) &= 0.9 \\ 1 - \frac{t^2}{16} &= 0.9 \\ t^2 &= \frac{16}{10} \\ t &= \pm\frac{2\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

Negatiivinen arvo hylätään, joten herra K tulisi saapua pysäkille hetkellä $t = \frac{2\sqrt{10}}{5} \approx 1{,}26$ (minuuttia).

4. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat kumpikin riippumattomasti tasajakaumaa välillä $(-1, 1)$.
   (a) Laske $g(EX)$ ja $Eg(X)$, kun $g(x) = x^2$.

(b) Laske $\mathrm{var}(X+Y)$ ja $\mathrm{var}(X-Y)$.
(c) Laske $\mathrm{cov}(X,\ X+Y)$.

Ratkaisu. (a) Tasajakauman odotusarvon kaavasta saadaan suoraan $EX = (1-1)/2 = 0$, joten

$$g(EX) = g(0) = 0^2 = 0.$$

Toisaalta muunnoksen odotusarvo saadaan lauseen 4.5 mukaisesti integraalina

$$Eg(X) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{3}.$$

Vaihtoehtoisesti olisi voitu käyttää tunnettua tasajakauman varianssia $(b-a)^2/12 = [1-(-1)]^2/12 = 2^2/12 = 4/12 = 1/3$. Koska tässä $EX = 0$, niin $E[X^2] = \mathrm{var}\, X$.

(b) A-kohdassa jo todettiin, että $\mathrm{var}\, X = 1/3$. Koska Y on samoin jakautunut, niin myös $\mathrm{var}\, Y = 1/3$. Riippumattomuuden ja varianssin lineaarisuuden nojalla

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}\, X + \mathrm{var}\, Y = 1/3 + 1/3 = 2/3.$$

Toisaalta myös

$$\mathrm{var}(X-Y) = \mathrm{var}\, X + \mathrm{var}(-Y) = 1/3 + 1/3 = 2/3.$$

(c) Kovarianssin bilineaarisuuden (Lause 4.8) mukaan

$$\mathrm{cov}(X,\ X+Y) = \mathrm{cov}(X,X) + \mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{var}(X) + 0 = 1/3.$$

Termin $\mathrm{cov}(X,Y)$ häviäminen johtuu X:n ja Y:n riippumattomuudesta. C-kohdan voi laskea myös (hiukan pidemmin) suoraan kovarianssin määritelmästä odotusarvojen avulla.