**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Todennäköisyyslaskenta**
**2. kurssikoe 16.12.2013**
**Ratkaisuehdotuksia / Jukka Kohonen**

1. Satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = \frac{k}{1-x^2}, \quad \text{kun} \quad -1 < x < 1 \quad \text{ja} \quad 0 < y < 1 - x^2,$$

ja nolla muualla.
(a) Ratkaise vakion $k$ arvo.
(b) Laske $X$:n reunatiheysfunktio $f_X$.
(c) Laske $Y$:n ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X = x)$.

*Ratkaisu.* (a) $f$:n täytyy olla kaikkialla epänegatiivinen, ja sen **integraalin yli koko tason pitää olla 1.** Epänegatiivisuus toteutuu kun $k \geq 0$. Integraaliehto on

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-1}^{-1} \left( \int_0^{1-x^2} \frac{k}{1-x^2} dy \right) dx \\
&= k \int_{-1}^{-1} \frac{1}{1-x^2} \left( \int_0^{1-x^2} dy \right) dx \\
&= k \int_{-1}^{-1} \frac{1}{1-x^2} (1-x^2) dx \\
&= k \int_{-1}^{-1} dx \\
&= 2k,
\end{aligned}$$

eli $k = 1/2$.

(b) Kun $-1 < x < 1$, niin

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x^2} f(x,y) dy \\
&= \int_0^{1-x^2} \frac{k}{1-x^2} dy \\
&= \frac{k}{1-x^2} \int_0^{1-x^2} dy \\
&= \frac{k}{1-x^2} \cdot (1-x^2) \\
&= k.
\end{aligned}$$

Kun $x \leq -1$ tai $x \geq 1$, on $X$:n tiheys nolla, koska yhteistiheyskin on siellä nolla.

(c) Kun $-1 < x < 1$ ja $0 < y < 1 - x^2$, on

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{k/(1-x^2)}{k} \\
&= \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

$Y$:n ehdollinen jakauma on siis välin $(0, 1-x^2)$ tasajakauma ja sen odotusarvo on $\frac{1}{2}(1-x^2)$.

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X \mid Y \sim U(4Y, 4Y+2),$$
$$Y \sim U(0,1),$$

missä $U(a,b)$ tarkoittaa tasajakaumaa välillä $(a,b)$.

(a) Laske $EX$.

(b) Laske $\operatorname{var} X$.

(c) Kerro perustelun kera, onko satunnaismuuttujien $X$ ja $Y$ yhteisjakauma jokin tasajakauma ja jos on, missä alueessa.

*Ratkaisu.* (a) Jos $Y = y$, niin $X$:n ehdollinen odotusarvo on tasajakauman $U(4y, 4y+2)$ odotusarvo eli $4y+1$. **Iteroidun odotusarvon kaavalla (lause 8.3)**

$$EX = E[E(X|Y)] = E[4Y+1] = 4EY + 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

Vaihtoehtoisesti voisi muodostaa yhteistiheysfunktion ja integroida.

(b) **Lauseen 8.4** mukaisesti

$$\begin{aligned}
\operatorname{var} X &= E[\operatorname{var}(X|Y)] + \operatorname{var}[E(X|Y)] \\
&= E\left[\frac{2^2}{12}\right] + \operatorname{var}[4Y+1] \\
&= \frac{4}{12} + 4^2 \operatorname{var} Y \\
&= \frac{4}{12} + \frac{16}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti varianssin voisi laskea iteroidun odotusarvon $E[X^2] = E[E(X^2|Y)]$ avulla, tai muodostamalla yhteistiheysfunktion $f_{X,Y}$ ja integroimalla.

(c) Alueessa, jossa $0 < y < 1$ ja $4y < x < 4y+2$ (eräs suunnikas) on **kertolaskusäännön (moniste s. 108)** mukaisesti yhteistiheysfunktio

$$f_{X,Y}(X,Y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

eli vakio, joten kyseessä on tasajakauma.

3. Satunnaismuuttujalla $X$ on tasajakauma välillä $(0,4)$ ja satunnaismuuttujalla $Y$ on eksponenttijakauma odotusarvolla 1 (ts. sen tiheysfunktio on $f_Y(y) = e^{-y}$, kun $y > 0$). Merkitään $U = X$ ja $V = X + Y$.

(a) Laske satunnaismuuttujien $U$ ja $V$ yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u,v)$. Ilmoita tarkasti, missä alueessa se on positiivinen.

(b) Laske $V$:n reunatiheysfunktio $f_V(v)$.

(c) Laske $EV$.

*Ratkaisu.* Jotta tehtävä on ylipäätään laskettavissa, joutuu olettamaan, että $X$ ja $Y$ ovat riippumattomat (muutenhan reunajakaumista ei voi päätellä yhteisjakaumaa). Oletuksen erikseen mainitsemista vastauksessa ei kuitenkaan vaadittu.

(a) Kuvaus $(u,v) = \mathbf{g}(x,y) = (x, x+y)$ on jatkuvasti derivoituva koko tasossa. Sillä on käänteiskuvaus $(x,y) = \mathbf{h}(u,v) = (u, v-u)$, ja sekin on jatkuvasti derivoituva koko tasossa. Kyseessä on siis diffeomorfismi tasolta tasolle, ja voidaan soveltaa **tiheysfunktion muunnoskaavaa (lause 7.8).**

Vektorin $(X,Y)$ tiheysfunktio on (kun $X$ ja $Y$ oletetaan riippumattomiksi)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{4} e^{-y}, \quad \text{kun } 0 < x < 4 \text{ ja } 0 < y,$$

ja nolla muualla.

Jacobin determinantti on

$$J_{\mathbf{h}}(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 1.$$

Kun ytf:n positiivisuusehto esitetään $u$:n ja $v$:n avulla, saadaan

$$0 < u < 4 \wedge 0 < v - u$$

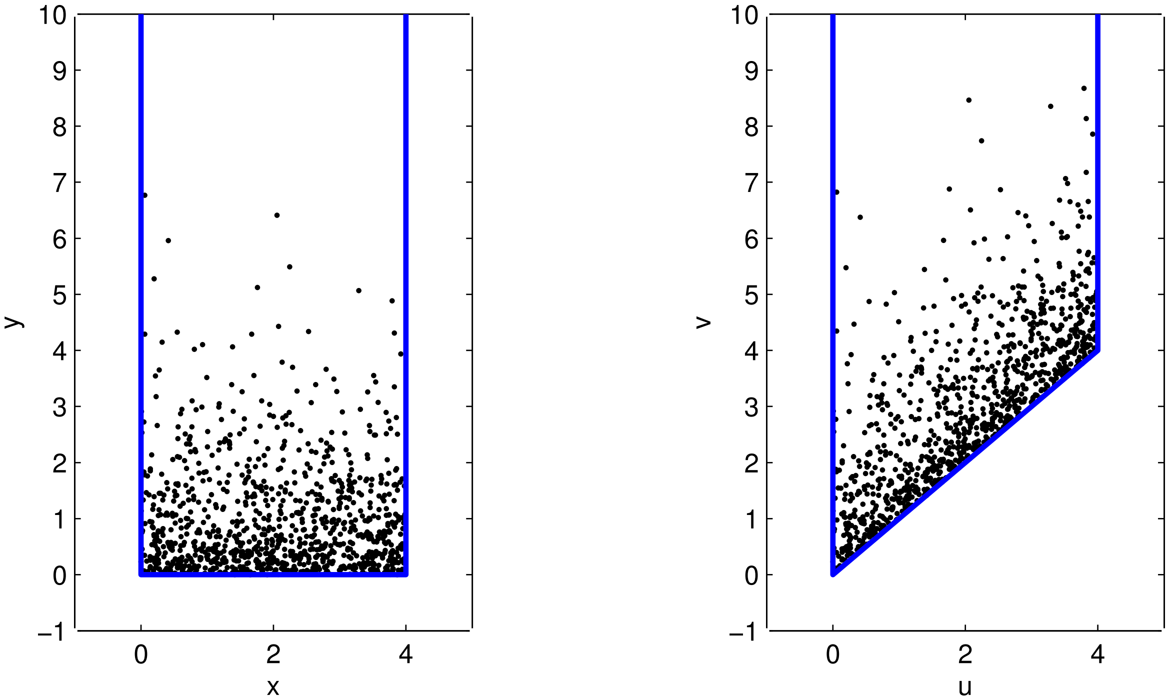
eli yhtäpitävästi

$$0 < u < 4 \wedge u < v.$$

Tässä alueessa pätee muunnoskaavan mukaisesti

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(x, y) \cdot |J_{\mathbf{h}}(u, v)| \\ &= \frac{1}{4} e^{-y} \cdot |1| \\ &= \frac{1}{4} e^{u-v}, \end{aligned}$$

ja muualla $f_{U,V}(u, v) = 0$.




Kuva 1. Pisteparvilla havainnollistettuna jakaumat $f_{X,Y}(x, y)$ (vasemmalla) ja $f_{U,V}(u, v)$ (oikealla). Yhteistiheys on positiivinen sinisellä viivalla merkityssä alueessa.

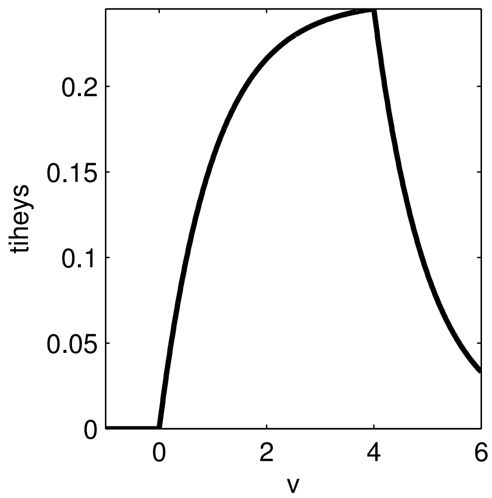
(b) Reunatiheys saadaan yhteistiheydestä integroimalla. Integrointirajojen kanssa on oltava tarkkana. Helpointa on käsitellä erikseen tapaukset $v < 4$ ja $v \geq 4$.
Kun $0 < v < 4$, on ytf positiivinen kun $0 < u < v$, joten

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^v f_{U,V}(u, v) du \\ &= \int_0^v e^{u-v} du \\ &= e^{-v} \int_0^v e^u du \\ &= e^{-v}(e^v - 1) \\ &= 1 - e^{-v}. \end{aligned}$$

Kun $v \geq 4$, on ytf positiivinen kun $0 < u < 4$, joten

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^4 f_{U,V}(u,v)du \\ &= \int_0^4 e^{u-v}du \\ &= e^{-v}\int_0^4 e^u du \\ &= e^{-v}(e^4 - 1). \end{aligned}$$

Lisäksi jos $v \leq 0$, ytf on aina nolla joten tällöin $f_V(v) = 0$.




KUVA 2. $V$:n reunatiheysfunktio $f_V$.

(c) **Odotusarvon lineaarisuuden** nojalla $EV = E[X + Y] = EX + EY = 2 + 1 = 3$.
Voisi myös laskea tiheysfunktion $f_V$ avulla integraalina, mutta se on paljon työläämpäää.

4. Tikkatauluun heitetään kaksi tikkaa, joiden osumakohdat ovat $T_1 = (X_1, Y_1)$ ja $T_2 = (X_2, Y_2)$. Kaikki neljä koordinaattia ovat riippumattomat ja standardinormaalijakautuneet.
(a) Olkoon $T_3 = (X_3, Y_3)$ kahden tikan osumakohtien geometrinen keskipiste, ts. tikkoja yhdistävän janan keskipiste. Mikä $T_3$:n jakauma?
(b) Kummastakin tikasta ($i = 1, 2$) saa sakkopisteitä määrän $S_i = X_i^2 + Y_i^2$. Mikä on kokonaissakon $S_1 + S_2$ jakauma?
(c) Mikä on kokonaissakon odotusarvo?

*Ratkaisu.* (a) Keskipisteen x-koordinaatti on $X_3 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, joka on normaalijakautunut odotusarvolla $\frac{1}{2}(EX_1 + EX_2) = 0$ ja varianssilla $(\frac{1}{2})^2(\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$. Siis $X_3 \sim N(0, \frac{1}{2})$. Vastaavasti nähdään että $Y_3 \sim N(0, \frac{1}{2})$. Lisäksi koska $X_3$ on funktio $X_1$:stä ja $X_2$:sta, ja $Y_3$ on funktio $Y_1$:stä ja $Y_2$:sta, ne ovat riippumattomat.
Tuloksen voi myös ilmaista vektorimuodossa: $T_3 \sim N(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\mathbf{I}_2)$, missä $\mathbf{0}$ tarkoittaa nollavektoria ja $\mathbf{I}_2$ yksikkömatriisia.
(b) Sakko $X_1^2 + Y_1^2 + X_2^2 + Y_2^2$ on neljän riippumattoman standardinormaalijakautuneen muuttujan neliöiden summa, joten se on määritelmän mukaan $\chi_4^2$-jakautunut.
(c) Ratkaisu 1: Koska $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \sim N(0, 1)$, on

$$\begin{aligned} E[X_1^2 + Y_1^2 + X_2^2 + Y^2] &= E[X_1^2] + E[Y_1^2] + E[X_2^2] + E[Y_2^2] \\ &= \operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} Y_1 + \operatorname{var} X_2 + \operatorname{var} Y_2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Ratkaisu 2: $\chi_4^2$-jakauman odotusarvo on sen vapausasteluku eli 4.