Todennäköisyyslaskennan kurssi, 10. harjoitus (2.–5.12.2013)

Huom! 10. harjoitusviikon perjantaina 6.12. laitos on suljettuna itsenäisyyspäivän vuoksi, jolloin ei pidetä laskuharjoituksia. Harjoituksissa voi käydä muissa ryhmissä. Perjantain ryhmään ilmoittautuneet voivat myös palauttaa ratkaisunsa kirjallisesti viimeistään 5.12.

1. Olkoon X sm, $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ sv ja olkoon sv $\mathbf{Z} = (X, Y_1, Y_2)$ sellainen, että

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Laske (ts. lue annetusta matriisista): a) $\mathrm{var}(X)$, b) $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})$, c) $\mathrm{cov}(X, \mathbf{Y})$, d) satunnaisvektorin (Y_2, X) kovarianssimatriisi eli $\mathrm{Cov}((Y_2, X))$.

2. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ kaksiulotteisen satunnaisvektorin $\mathbf{Z} = (X, Y)$ kovarianssimatriisi. Esitä se muodossa $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on 2×2-alakolmiomatriisi, ts. etsi jokin muotoa

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T, \quad \text{jossa} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

oleva matriisin $\mathbf{\Sigma}$ esitys. (Opastus: Kirjoittamalla matriisitulon auki saat kolme riippumatonta yhtälöä. Yhtälöitä on yksi kutakin kovarianssimatriisin alkiota kohti, mutta matriisien symmetrisyys eliminoi yhtälöistä yhden. Etsi yhtälöille ratkaisu.)

3. Olkoon $n \times n$-vakiomatriisi $\mathbf{M}$ ortogonaalinen, eli $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$. Oletetaan, että $\mathbf{U} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Määritellään $\mathbf{X} = \mathbf{M}\,\mathbf{U}$ ja $\mathbf{Y}$ siten, että $\mathbf{Y} = (X_1, \ldots, X_k)$, kun $k \le n$.

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ jakauma (tyyppi ja parametrit)?

b) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

c) Mikä on satunnaismuuttujan $\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}$ jakauma?

4. (Kaksiulotteisen normaalijakauman ehdollinen jakauma Choleskyn hajotelman avulla) Tarkastelemme vektoria (X, Y) joka noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on (μ_X, μ_Y) ja kovarianssimatriisi on $\mathbf{\Sigma}$. Tehtävässä 2 johdettiin satunnaisvektorin (X, Y) kovarianssimatriisin

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

Choleskyn hajotelma ts. alakolmiomatriisi $\mathbf{A}$ siten, että $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$. Jakson 10.2 perusteella pari (X, Y) voidaan esittää kaavalla

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}$$

jossa U_1 ja U_2 ovat riippumattomia ja noudattavat $N(0,1)$-jakaumaa. Laske tähän tulokseen perustuen satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma ehdolla $X = x$, kun oletamme että $\sigma_X > 0$. (Opastus: esitä Y muodossa $g(X) + kU_2$. Koska $X \perp\!\!\!\perp U_2$ (miksi?), niin ehdolla $X = x$ sm:lla Y on jakauma $N(g(x), k^2)$.)

5. Kurssin *Johdatus tilastolliseen päättelyyn* osallistujilta kysyttiin keväällä 2012 (nimettömästi) ikä, pituus ja paino. Tarkastelemme tämän kyselyn tulosten perusteella muodostettua normaalijakaumamallia miespuolisten opiskelijoiden ominaisuuksille. Miesopiskelijan ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $\mathbf{V} = (A, L, W)$

$$E\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 24 \\ 180 \\ 77 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{Cov} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 29 \\ 0 & 51 & 42 \\ 29 & 42 & 183 \end{bmatrix}$$

Moniulotteisen normaalijakauman ehdolliset jakaumat selviävät jaksosta 10.7.

a) Mikä on miesten painon (reuna-)jakauma?

b) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen miesten painon jakauma?

c) Johda ehdollinen jakauma $W \mid (A = a, L = l)$. Mikä on 28 vuotta vanhojen ja 175 cm pitkien miesten painon jakauma?

6. Selitä, miksi edellisen tehtävän normaalijakaumamallissa A ja L ovat riippumattomia. Ovatko ikä A ja pituus L ehdollisesti riippumattomia, jos paino W on tunnettu?