Todennäköisyyslaskennan kurssi, 9. harjoitus (25.–29.11.2013)

1. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{Tas}(0,1)$. Toisin sanoen vektorilla (X,Y) on tasajakauma yksikköneliössä. Määritellään nyt uusi satunnaisvektori (U,V) lineaarimuunnoksilla

$$U = 3X + 2Y, \qquad V = 2X + 3Y.$$

a) Kirjoita muunnos matriisikertolaskun muotoon, ts. muodosta sellainen neliömatriisi A, että $(U,V) = A(X,Y)$, missä (X,Y) ja (U,V) ymmärretään pystyvektoreiksi.

b) Tutki mihin yksikköneliön pisteet (X,Y) kuvautuvat muunnoksessa. Vihje: kuvajoukko on eräs suunnikas, ja voit aloittaa esim. tutkimalla mihin neliön kulmat kuvautuvat; voit myös arpoa tietokoneella joukon yksikköneliön sisäpisteitä, suorittaa kullekin niistä em. muunnoksen ja piirtää ne uuteen koordinaatistoon.) Laske Jacobin determinantti ja päättele siitä vektorin (U,V) tiheysfunktio.

c) Laske satunnaisvektorin (U,V) odotusarvo ja kovarianssimatriisi. Voit käyttää joko kovarianssin bilineaarisuutta tai kovarianssin muunnoskaavaa (7.9) monisteen sivulta 99. Laske vielä U:n ja V:n korrelaatiokerroin.

d) Keksi jokin toinen matriisi B, jolla muunnoksen $(U,V) = B(X,Y)$ komponenttien korrelaatio onkin negatiivinen.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa tasajakaumaa $\mathrm{Tas}(0,1)$. Toisin sanoen vektorilla (X,Y) on tasajakauma yksikköneliössä. Määritellään nyt uusi satunnaisvektori (U,V) muunnoksilla

$$U = X, \qquad V = \sin(\pi X) + Y.$$

Huomaa, että muunnos ei ole affiinimuunnos.

a) Tutki, mihin yksikköneliön pisteet (X,Y) kuvautuvat tässä muunnoksessa. (Voit taas aloittaa esim. kokeilemalla useita neliön sisäpisteitä vaikkapa tietokoneella ja piirtämällä niitä vastaavat muunnokset. Voit myös tutkia mihin neliön kulmat ja sivut kuvautuvat.)

b) Ratkaise vektorin (U,V) yhteistiheysfunktio tiheysfunktion muunnoskaavan avulla. Onko vektorilla (U,V) tasajakauma ja jos on, missä joukossa?

c) Määritä V:n ehdollinen tiheysfunktio (ehdolla $U = u$) ja sen odotusarvo. Piirrä regressiofunktio.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$ on vakio. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = X + Y, \qquad V = X - Y.$$

(Silmäile esimerkkiä 7.7 ennen kuin lähdet laskemaan tätä laskua.)

a) Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio.

b) Johda satunnaismuuttujien U ja V reunatiheysfunktiot. (U:n jakauma on tuttu luvusta 5; V:llä on ns. Laplacen jakauma eli kaksitahoinen eksponenttijakauma).

4. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x, y) = 8\,xy, \qquad 0 < x < y < 1$$

(ja nolla muualla).

a) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y \mid x)$, kun $0 < x < 1$.

b) Laske $m(x) = \int_x^1 y\, f_{Y|X}(y \mid x)\, \mathrm{d}y$, kun $0 < x < 1$. (Arvo $m(x)$ on nyt ehdollisen jakauman $Y \mid (X = x)$ odotusarvo eli ns. ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X = x)$.)

5. Olkoot X ja Y riippumattomia Poissonin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $EX = \lambda > 0$ ja $EY = \mu > 0$. Olkoon $U = X + Y$. Johda satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ (jossa $u \geq 0$ on kokonaisluku). Ehdollinen jakauma on binomijakauma, mutta mitkä ovat jakauman parametrit?

Opastus: U:n jakauman saat selville Poissonin jakauman yhteenlaskuominaisuuden avulla (ks. jakso 5.1.5). Laskeaksesi ehdollisen todennäköisyyden $P(X = x \mid U = u)$ tarvitset todennäköisyyden $P(X = x, X + Y = u)$, jonka saat laskettua suoraan tehtävänannon perusteella.

6. Tarkastellaan hierarkkisesti määriteltyä yhteisjakaumaa

$$\begin{aligned} X \mid (Y = y) &\sim \mathrm{Poi}(\lambda y) \\ Y &\sim \mathrm{Gam}(s, s), \end{aligned}$$

jossa $\lambda, s > 0$ ovat vakioita. Ts. yllä on kerrottu tekijät yhteisjakauman esityksessä

$$f_{X,Y}(x, y) = f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y).$$

Nyt X:n jakauma on diskreetti ja Y:n jatkuva. Y:n tiheysfunktio, sekä X:n ehdollinen ptnf löytyvät kappaleesta 5.

Kirjoita yhteisjakauman tiheys, ja johda siitä X:n reunajakauman ptnf integroimalla. Tulokseksi tulee tietty negatiivinen binomijakauma (ks. jakso 5.1.4). Mitkä ovat sen parametrit?