

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 7. harjoitus (11.–15.11.2013)

1. Olkoon $X > 0$ sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot EX , $E(1/X)$ ja $E \ln(X)$ ovat kaikki reaalityyppisiä. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla

- lukupien $1/EX$ ja $E(1/X)$ suuruusjärjestyksetä, ja
- lukupien $\ln(EX)$ ja $E \ln(X)$ suuruusjärjestyksestä?
- Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun X :llä on välin $(1, 2)$ tasajakautuma, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä järjestyksessä suuruusjärjestyksen oikein päin.

2. Olkoot x_1, \dots, x_n aidosti positiivisia lukuja. Niiden aritmeettinen keskiarvo $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Tämän lisäksi tarkastelemme lukujen x_i geometrista keskiarvoa G ja ja harmonista keskiarvoa H , jotka määritellään kaavoilla

$$G = [x_1 x_2 \dots x_n]^{1/n}, \quad H = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Todista epäyhtälö

$$H \leq G \leq \bar{x}$$

seuraavien ohjeiden avulla. Määritellään diskreetti satunnaismuuttuja X siten, että se saa todennäköisyydellä $1/n$ arvokseen luvun x_i (kun $i = 1, \dots, n$). Määritellään lisäksi $Y = 1/X$. Tarkista, Jensenin epäyhtälön avulla, mitä voit sanoa arvojen $\ln(EX)$, $E \ln(X)$, $\ln(EY)$ ja $E \ln(Y)$ välisestä suuruusjärjestyksestä.

3.

- Suorakulmion kanta on a ja korkeus b . Tällöin sen piiri on $p = 2(a + b)$ ja pinta-ala $A = ab$. Laske pinta-alaltaan samankokoisen neliön piiri ja todista epäyhtälö suorakulmion ja neliön piirien välillä. (Vihje: Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välinen epäyhtälö, tai Jensenin epäyhtälö.)
- Suorakulmaisen särmiön sivut ovat a , b ja c . Tällöin särmiön pinta-ala on $A = 2(ab + bc + ca)$ ja tilavuus $V = abc$. Laske tilavuudeltaan samankokoisen kuution pinta-ala ja todista epäyhtälö särmiön ja kuution pinta-alojen välillä.

4. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktioilla

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Laske seuraavat todennäköisyydet,

- $P(Y < X^2)$,
- $P(Y^2 < X < Y)$.

5. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktioilla

$$f(x, y) = cxy, \quad 0 < x < y < 2$$

(ja $f(x, y)$ on nolla muuten). Laske vakion c arvo sekä reunatiheysfunktiot f_X ja f_Y .

6. Olkoon parilla (X, Y) tasajakautuma ympyrässä, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ja jonka halkaisija on yksi. Laske satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheysfunktio, ja tunnista tätä kautta X :n reunajakauma. (Reunajakauma on eräs kappaleen 5 jakaumista.)