

Todennäköisyytlaskennan kurssi, syksy 2013
6. harjoitus (4.–8.11.2013)

1. Laske numeeriset arvot seuraaville integraaleille:

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx$$

ja

$$\int_0^1 x^4 (1-x)^5 dx.$$

Vihjeitä: Gammafunktion määritelmä (5.3), muuttujanvaihto ym. luvun 5.2 asioita.

2. Hahmottele gammafunktion kulkua laskemalla $\Gamma(t)$ kokonaisluvuille $t = 1, \dots, 4$ ja puoliluvuille $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ tarkasti, ja piirtämällä sitten funktion kuvaaja. Vihje: Funktionaalilyhtälö (5.4) pätee vaikka t ei olisi kokonaisluku.

3. Tikkataulun keskipiste on origossa. Tikkaa heitetään siten, että X - ja Y -koordinaatti (senttimetreinä) ovat riippumattomasti normaalijakautuneet odotusarvolla 0 ja hajonnalla 10. Mikä on suuren $Z = R^2$ jakauma, kun R on tikan etäisyys origosta?

Mikä on Z :n kertymäfunktio? Laske sen avulla R :n mediaani.

Vihje: Kappaleet 5.3.7 ja 5.3.4. Jos haluat voit vaihtaa mittayksikköä ja tarkastella etäisyyksiä esim. desimetreinä.

4. Kolikkoa heitetään toistuvasti, kunnes on saatu kaksi kruunaa. Olkoon X saatujen klaavojen määrä. Mikä on X :n odotusarvo? Laske todennäköisyydet $P(X < EX)$, $P(X = EX)$ ja $P(X > EX)$.

5. Eräessä fysikaalisessa kokeessa tapahtuu X kappaletta tyyppin 1 hajoamisreaktioita ja Y kappaletta tyyppin 2 hajoamisreaktioita. X ja Y ovat kumpikin riippumattomasti Poi(1)-jakautuneet. Laske todennäköisyys, että kumpaakin reaktiotyyppiä tapahtuu tasan k kappaletta (ts. $P(X = k, Y = k)$), kun $k = 0, 1, 2, 3$.

Mitä voit edellä lasketun perusteella sanoa todennäköisyydestä $P(X = Y)$? Toisin sanoen, laske tälle todennäköisyydelle ylä- ja alaraja.

6. Jakauman *huipukkuus* (engl. *excess kurtosis*) on sen neljäs keskusmomentti jaettuna varianssin neliöllä, ts. μ_4/μ_2^2 . (Keskusmomentti on määritelty monisteen luvussa 4.5.) Laske seuraavien jakaumien huipukkuudet:

(a) $N(0, 1)$,

(b) tasajakauma, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi 1,

(c) diskreetti tasajakauma kahden alkion joukossa $\{-a, +a\}$, missä a on valittu siten, että jakauman varianssi on 1.