Todennäköisyyslaskennan kurssi, 5. harjoitus (7.–11.10.2013)

1. (Luvut $g(EX)$ ja $Eg(X)$ ovat tavallisesti erisuuria.)
Laske $g(EX)$ ja $Eg(X)$, kun $g(x) = x^3$ ja

a) X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa joukossa $\{1, 2, 3\}$,

b) $X \sim \mathrm{U}(0, 1)$.

2. Olkoot X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia, joille

$$EX = -1, \quad EY = 1, \quad EX^2 = 3, \quad EY^2 = 4, \quad E(XY) = 1.$$

Laske (a) $\operatorname{var} X$, (b) $\operatorname{var} Y$, (c) $\operatorname{cov}(X, Y)$, (d) $\operatorname{var}(2X - Y)$.

3. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$EX_1 = 1, \quad EX_2 = 2, \quad \operatorname{var} X_1 = 1, \quad \operatorname{var} X_2 = 3.$$

Määritellään

$$Y = 2013 - 10\,X_1 + 2\,X_2, \qquad Z = 3 + X_1 - 2\,X_2.$$

Laske EY, EZ, $\operatorname{var}(Y)$, $\operatorname{var}(Z)$ ja $\operatorname{cov}(Y, Z)$.

4. Laske kolme ensimmäistä momenttia EX^k, $k = 1, 2, 3$, kun X noudattaa Poissonin jakaumaa $\mathrm{Poi}(\theta)$ ja $\theta > 0$. Jakauman momenttiemäfunktio löytyy jaksosta 5.1.5.

5. Johda EX^4, kun $X = \mu + \sigma\,Z$ ja Z on satunnaismuuttuja, jonka neljä ensimmäistä momenttia ovat

$$EZ = EZ^3 = 0, \quad EZ^2 = 1, \quad EZ^4 = 3.$$

(Tulet johtaneeksi kaavan jakauman $N(\mu, \sigma^2)$ neljännelle momentille, koska jakaumalla $N(0, 1)$ on yllä luetellut momentit.)

6. Olkoon $Z \sim N(0, 1)$. Laske arvot Z:n kuudelle ensimmäiselle momentille EZ^k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ seuraavilla kahdella tavalla.

a) Tarkastele integraalia $EZ^k = \int_{-\infty}^{\infty} z^k\, f(z)\,\mathrm{d}z$. Parittomilla k integrandi on pariton funktio, joten integraali on nolla. Parillisilla k integrandi on parillinen funktio: muuta integrointialueeksi ensin $(0, \infty)$, tee muuttujanvaihto $y = x^2/2$ sekä ilmaise lopputulos gammafunktion avulla. Käytä hyväksi jaksossa 5.2 kerrottuja gammafunktion ominaisuuksia.

b) Kehitä jaksossa 5.3.6 johdettava $N(0, 1)$-jakauman momenttiemäfunktio $M(t) = \exp(t^2/2)$ potenssisarjaksi, ja tutki sarjan termejä.