

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 4. harjoitus (30.9.–4.10.2013)

1. Logistinen jakauma parametreilla $\mu \in \mathbb{R}$ ja $s > 0$ voidaan määritellä siten, että se on satunnaismuuttujan Y jakauma, kun

$$Y = \mu + s \ln \frac{X}{1 - X},$$

ja $X \sim U(0, 1)$. Johda logistisen jakauman tiheysfunktio.

2. Alla annetaan diskreettien kokonaislukuarvoisten satunnaismuuttujien $1 \leq X \leq 2$ ja $1 \leq Y \leq 3$ yptnf $f(x, y)$ kahdessa eri tilanteessa. Johda satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat, ja tutki ovatko X ja Y riippumattomia.

a) $f(x, y) = \frac{1}{5}$, kun $1 \leq x \leq 2$ ja $1 \leq y \leq 3$ ja $x \leq y$,

b) $f(x, y) = \frac{1}{6}$, kun $1 \leq x \leq 2$ ja $1 \leq y \leq 3$.

3. Noppaa heitetään kaksi kertaa. V_1 on ensimmäisen heiton silmäluku ja V_2 toisen heiton silmäluku. Määritellään

$$X = \min(V_1, V_2), \quad Y = \max(V_1, V_2)$$

Perustele, miksi satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/36, & \text{kun } 1 \leq x = y \leq 6, \\ 2/36, & \text{kun } 1 \leq x < y \leq 6 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Johda reuna-ptnft f_X ja f_Y yptnf:n reunasummina.

4. Edellisen tehtävän tilanteessa reunajakaumien kertymäfunktio F_X ja F_Y voidaan järkeillä suoraan ilman, että yptnf:a lainkaan johdetaan. Reunapistetodennäköisyysfunktio f_X ja f_Y saadaan laskettua vastaavasta kertymäfunktioista. Johda f_X ja f_Y tällä periaatteella.

Opastus: esitä tapahtumat $\{X > x\}$ ja $\{Y \leq y\}$ heittojen silmälukujen V_1 ja V_2 avulla, ja käytä riippumattomuutta.

5. Kukin ihminen kuuluu ABO-veriryhmäjärjestelmässä täsmälleen yhteen neljästä veriryhmästä A, B, AB tai O. Suomessa eri veriryhmien esiintyvyydet ovat A 43 %, B 17 %, AB 8 % ja O 32 %. Suomen väestöstä otetaan kahdeksan henkilön satunnaisotos (takaisinpanolla). Laske todennäköisyys, että kaikkia neljää ABO-järjestelmän veriryhmää saadaan otokseen kutakin kaksi kappaletta.

6. Noppaa heitetään kaksi kertaa ja silmäluvut ovat V_1 ja V_2 . Kuten tehtävässä 2, määritellään $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Laske EX ja EY .