Todennäköisyyslaskennan kurssi, 3. harjoitus (23.–27.9.2013)

1. Mitkä seuraavista kertymäfunktioista F_1, F_2, F_3 ja F_4 ovat diskreetin jakauman kertymäfunktioita ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Laske diskreeteille jakaumille niiden pistetodennäköisyysfunktio ja jatkuville jakaumille niiden tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/6 & \text{kun } 0 \le x < 1/4, \\ 1/2 & \text{kun } 1/4 \le x < 3/4, \\ 1 & \text{kun } x \ge 3/4, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x/2 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^3 & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \ge 1. \end{cases}$$

2. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa h on

$$h(x) = x^{\alpha - 1}, \quad \text{kun } 0 < x < 1,$$

ja h on nolla muualla.

(a) Laske vakion k arvo, (b) johda jakauman kertymäfunktio, (c) johda jakauman kvantiilifunktio.

3. Olkoon X:llä jatkuva jakauma siten, että sen tiheysfunktio f on aidosti positiivinen välillä (a, b) ja nolla muualla (sallimme arvot $a = -\infty$ sekä $b = \infty$). Monisteessa kaavan (2.9) yläpuolella johdetaan satunnaismuuttujan $F(X)$ kertymäfunktio, kun F on X:n kertymäfunktio.

Johda samaan tapaan satunnaismuuttujan $Y = 1 - F(X)$ kertymäfunktio sekä tunnista Y:n jakauma tuloksen perusteella.

4. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf $f_X(x)$ on jatkuva ja aidosti positiivinen, kun $x > 0$ (ja $f_X(x) = 0$ muuten). Laske satunnaismuuttujien Y ja Z kertymäfunktiot, kun

$$Y = \sqrt{X}, \qquad Z = 1/X.$$

Tarkista, että sekä Y:n että Z:n jakauma on jatkuva (joko sovella lausetta 2.7 tai tarkista lauseen 2.12 oletukset). Laske lopuksi Y:n ja Z:n tiheysfunktiot.

5. Johda edellisessä tehtävässä määriteltyjen satunnaismuuttujien Y ja Z tiheysfunktiot muuttujanvaihtotekniikalla (sovella lausetta 2.12 tai muistisääntöä (2.12)).

6. (Testin p-arvon jakauma.) Tarkastelemme sellaista tilastollista testiä, jossa suuret testisuureen Z arvot antavat näyttöä nollahypoteesia H_0 vastaan. Tällaisen testin p-arvo määritellään kaavalla

$$p\text{-arvo} = P(Z_0 \ge z_{\text{obs}}) = 1 - F_0(z_{\text{obs}}),$$

jossa z_{obs} on testisuureen saama arvo aineistossa, F_0 on testisuureen kertymäfunktio nollahypoteesin mukaisessa populaatiossa, ja Z_0 on sm, jolla on kf F_0. Oletamme, että Z_0:lla on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f_0 ja kvantiilifunktiolla q_0. (Kuten jakson 2.9 alussa, oletamme että f_0 on aidosti positiivinen jollakin välillä (a, b) ja nolla sen ulkopuolella, ja lisäksi oletamme, että f_0 on jatkuva funktio välillä (a, b); arvot $a = -\infty$ sekä $b = \infty$ sallitaan.)

Tarkastelemme p-arvon otantajakaumaa, eli vastaavan satunnaismuuttujan U jakaumaa, jossa

$$U = 1 - F_0(Z_1),$$

ja Z_1 tarkoittaa satunnaismuuttujaa, jolla on (mahdollisesti vaihtoehtohypoteesin mukainen) jatkuva jakauma kf:lla F_1 ja tf:lla f_1, joka on nolla välin (a, b) ulkopuolella.

Laske U:n kf ja tf. Mitä jakaumaa U noudattaa, jos $F_1 = F_0$?