

Todennäköisyyslaskennan kurssi, 2. harjoitus (16.–20.9.2013)

1. Kolmea noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä saadaan pari? (Parissa kahdella nopista on sama silmäluku, ja jäljelle jäävän nopan silmäluku on eri kuin parin silmäluku.)

Vihje: alkeistapauksia on niin paljon, että niitä ei kannata luetella; kombinatoriikan tuloperiaate auttaa löytämään vastauksen.

2. Urheilijalta testataan doping-aineen S käyttöä testillä, jolla on kaksi mahdollista tulosta: tulos voi olla joko positiivinen (jolloin testi antaa todisteita aineen S käytöstä) tai negatiivinen. Tällaisen testin *sensitiivisyys* on määritelmän mukaan tn saada positiivinen testitulos, kun testattava henkilö on käyttänyt ainetta S, ja sen *spesifisyys* on tn saada negatiivinen testitulos, kun testattava henkilö ei ole käyttänyt ainetta S. Aineen käytön *prevalenssi* on todennäköisyys, että populaatiosta satunnaisesti valittu urheilija on käyttänyt ainetta S. Tarkastelemme nyt erinomaisen hyvää testiä, jonka sensitiivisyys on 99 % ja spesifisyys on 98 %. Aineen S käytön prevalenssi on 0.1 %.

Peräkylän urheilukisoissa Matti joutui dopingtestiin ja sai positiivisen testituloksen. Laske todennäköisyys, että Matti on käyttänyt ainetta S. (Tässä tietenkin kysytään ehdollista todennäköisyyttä. Sensitiivisyys ja spesifisyys ovat tiettyjä ehdollisia todennäköisyyksiä.)

3. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^3, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

a) Laske todennäköisyys $P(X = 0)$.

b) Laske todennäköisyys $P(\frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{2})$.

4. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka ptnf on $f(x) = k h(x)$, jossa k on vakio ja

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 1 \\ 3, & \text{jos } x = 2 \\ 2, & \text{jos } x = 3 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Laske k :n arvo sekä todennäköisyys $P(X > 1)$.

5. Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{kun } -2 < x < -1, \\ \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{kun } -1 < x < \frac{9}{4} \text{ ja } x \neq 0, \\ \frac{3}{10} \exp(-x + \frac{9}{4}), & \text{kun } x > \frac{9}{4}, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Tarkista, että f on tiheysfunktio (ts. tarkista, että $f \geq 0$ ja että f :n integraali koko reaaliakselin yli on yksi). Hahmottele f :n kuvaaja.

6. Olkoon X kuten tehtävässä 3. Johda satunnaismuuttujan $Y = X^2$ kertymäfunktio. (Ts. Y määritellään siten, että $Y(\omega) = X(\omega)^2$ kaikilla ω .)