1.1 Todennäköisyyden tulkintoja

- K1: *Millä todennäköisyydellä saat kuutosen nopanheitossa?*
- K2: *Millä todennäköisyydellä Olli Rehn valitaan europarlamenttiin kevään 2014 eurovaaleissa?*

Mitkä seuraavista todennäköisyyden tulkinnoista sopivat kysymyksiin K1 ja K2?

- Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys.
- Todennäköisyyden frekvenssitulkinta.
- Subjektiivinen todennäköisyys.

Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys

- Perusjoukko eli kaikkien mahdollisten alkeistapausten joukko Ω on nyt äärellinen.
- Tapauksen A todennäköisyydeksi valitaan A:lle suotuisten alkeistapausten lukumäärä jaettuna kaikkien mahdollisten tapausten lukumäärällä, eli

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{A\text{:n alkioiden lkm}}{\Omega\text{:n alkioiden lkm}}$$

- Käytetään esim. uhkapelien yhteydessä (nopanheitto, lantinheitto, korttipelit, lotto).

Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

- Mahdollinen kokeissa, joita voidaan toistaa mielin määrin riippumattomasti samoissa olosuhteissa.
- Riippumattomuus tarkoittaa sitä, että edelliset koetulokset eivät vaikuta seuraavien kokeiden tuloksiin.
- Tapahtuman A todennäköisyys yritetään määritellä kaavalla

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(A)}{N}, \tag{1}$$

  jossa $N(A)$ on niiden kokeiden frekvenssi (eli lukumäärä), joissa saatiin lopputulos A, ja N on riippumattomien toistojen lukumäärä.
- Suure $N(A)/N$ on tapahtuman A suhteellinen frekvenssi.

Lisää frekvenssitulkinnasta

- Todennäköisyyttä ei oikeasti voida määritellä suhteellisten frekvenssien raja-arvoina.
- On kuitenkin hyvin valaisevaa yrittää selittää todennäköisyyslaskennan käsitteitä frekenssitulkinnan avulla.
- Todennäköisyyslaskennan käsitteitä voidaan havainnollistaa tietokonesimuloinneilla. Tällöin sovelletaan frekvenssitulkintaa.

Todennäköisyyden subjektiivinen eli henkilökohtainen tulkinta

- Ainoa tapa soveltaa todennäköisyyslaskentaa ainutkertaisten tapahtumien yhteydessä.
- Todennäköisyys kuvaa henkilön (tai muun tahon) uskomuksen astetta väitteen totuuteen hänen käytettävissä olevan tiedon pohjalta.
- Eri tahot voivat tällöin saada erilaisia numeerisia vastauksia saman tapahtuman todennäköisyydelle.
- Saman henkilön todennäköisyydet tietylle tapahtumalle voivat olla eri aikoina erilaisia, jos henkilön käytössä oleva informaatio muuttuu.

Kysytään uudestaan

- K1: *Millä todennäköisyydellä saat kuutosen nopanheitossa?*
- K2: *Millä todennäköisyydellä Olli Rehn valitaan europarlamenttiin kevään 2014 eurovaaleissa?*

Mitkä seuraavista todennäköisyyden tulkinnoista sopivat kysymyksiin K1 ja K2?

- Klassinen eli symmetrinen todennäköisyys.
- Todennäköisyyden frekvenssitulkinta.
- Subjektiivinen todennäköisyys.

1.2 Joukko-oppia

- Joukko-oppi on todennäköisyyslaskennan perustyökalu.
- Joukko-opin kaavoja kannattaa havainnollistaa Vennin diagrammien avulla, jos tämä on mahdollista.
- Joukko-opin operaatioita tulkitaan tn-laskennassa usein sanallisesti, ks. taulukko 1.1.

Perusjoukko, alkeistapaus ja tapahtuma

- Ω on perusjoukko eli tarkasteltavan satunnaiskokeen kaikkien mahdollisten lopputulosten joukko.
- Perusjoukon alkioita $\omega \in \Omega$ kutsutaan alkeistapauksiksi (engl. *elementary event*).
- Perusjoukon osajoukkoja $A \subset \Omega$ kutsutaan tapahtumiksi (engl. *event*).
- Kun mallinnetaan reaalimaailman satunnaisilmiötä, perusjoukko voidaan valita muuten vapaasti, mutta sen pitää olla riittävän rikas, jotta kaikki kiinnostuksen kohteena olevat tapahtumat voidaan esittää sen osajoukkoina.
- Tietty sovellus voidaan käsitellä käyttämällä useita erilaisia valintoja.

1.3 Matemaattinen todennäköisyyden käsite

Tapahtumat $A_1, A_2, \ldots$ ovat erillisiä (engl. *disjoint*) eli toisensa poissulkevia (engl. *mutually exclusive*), mikäli

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{kun} \quad i \neq j.$$

Todennäköisyys(mitta) (engl. *probability measure*) P liittää perusjoukon Ω tapahtumaan $A \subset \Omega$ reaaliluvun $P(A)$, jota kutsutaan A:n todennäköisyydeksi. P toteuttaa aksioomat.

(1) $P(A) \geq 0$ kaikille tapahtumille $A \subset \Omega$,

(2) $P(\emptyset) = 0$ ja $P(\Omega) = 1$,

(3) (täysadditiivusuus) $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$, kun $A_1, A_2, \ldots$ ovat erillisiä tapahtumia.

Äärellinen additiivisuus

- Jos A ja B ovat erillisiä tapahtumia niin täysadditiivisuuden aksioomasta seuraa tn-mitan (äärellinen) additiivisuus eli

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{kun} \quad A \cap B = \emptyset. \tag{2}$$

- Jos $A_1, \ldots, A_n$ ovat erillisiä tapahtumia, niin

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

  Tämän voi johtaa paitsi täysadditiivisuuden aksioomasta myös induktiolla ominaisuudesta (2).
- Täysadditiivisuutta ei ole mahdollista johtaa induktiolla äärellisestä additiivisuudesta.

Äärellinen additiivisuus on helposti ymmärrettävä ominaisuus, täysadditiivisuus ei

- Sen seikan, että todennäköisyyden pitää olla äärellisesti additiivinen voi perustella todennäköisyyden frekvenssitulkinnan avulla.
- Täysadditiivisuus ei ole intuitiivisesti helposti ymmärrettävä ominaisuus.
- Täysadditiivisuus vaaditaan todennäköisyydeltä matemaattisen mukavuudenhalun takia: tällä tavalla saadaan matemaattisesti kaunis, voimakas ja yksinkertainen teoria.

Lause 1.1: todennäköisyyden ominaisuuksia

a) (Äärellinen additiivisuus) Jos $A \cap B = \emptyset$, niin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
b) $P(A^c) = 1 - P(A)$ kaikille A.
c) $0 \leq P(A) \leq 1$ kaikille A.
d) (Tn-mitan monotonisuus) Jos $A \subset B$, niin $P(A) \leq P(B)$.
e) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ kaikille A ja B.
f) (Yhteenlaskukaava) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ kaikille A ja B.
g) (Boolen epäyhtälö) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ kaikille A ja B.
h) (Bonferronin epäyhtälö) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ kaikille A ja B.

1.4 Kombinatoriikkaa

- Klassisessa todennäköisyyden tulkinnassa (eli tasaisessa todennäköisyysmallissa)

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}. \tag{3}$$

- Alkeistapaukset $\omega \in \Omega$ ovat tällöin symmetrisiä sikäli, että niillä on kaikilla sama todennäköisyys, eli

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}, \qquad \text{kaikilla } \omega \in \Omega.$$

- Jotta osaisimme laskea todennäköisyyksiä, meidän pitää osata laskea erinäisiä kombinatorisia laskuja.

Kuinka monella eri tavalla voidaan poimia k alkiota n-alkoisesta joukosta?

Saamme erilaisia vastauksia sen mukaan, valitaanko alkiot

- takaisinpanolla (eli palauttaen, engl. *with replacement*), jolloin sama alkio voidaan valita useaan kertaan, ja k voi olla suurempi kuin n;
- ilman takaisinpanoa (eli takaisinpanotta eli palauttamatta, engl. *without replacement*), jolloin valitaan $k \leq n$ eri alkiota.

Lisäksi pitää kertoa, onko poimintajärjestyksellä väliä vai ei.

- Jos poimintajärjestyksellä on väliä, niin valinta esitetään (järjestettynä) jonona.
- Jos poimintajärjestyksellä ei ole väliä, niin sellaiset kaksi valintaa ovat ekvivalentteja, joissa on poimittu samat alkiot.

Kombinatoriikan tuloperiaate

Tarkastellaan tehtävää, joka voidaan jakaa k:hon osatehtävään, joilla on seuraavat ominaisuudet.

- Ensimmäinen osatehtävä voidaan suorittaa n_1:llä eri tavalla.
- Kun ensimmäinen osatehtävä on suoritettu, toinen osatehtävä voidaan suorittaa n_2:lla eri tavalla (riippumatta siitä, mikä valinta tehtiin ensimmäisessä vaiheessa) jne.
- Kun $k-1$ ensimmäistä osatehtävää on suoritettu, k:s osatehtävä voidaan suorittaa n_k eri tavalla (riippumatta siitä, mitkä valinnat tehtiin aikaisemmissa vaiheissa).
- Koko tehtävän ratkaisu saadaan koottua yksikäsitteisellä tavalla osatehtävien $1, 2, \ldots, k$ ratkaisuista.

Tällöin koko tehtävä voidaan suorittaa $n_1 n_2 \cdots n_k$ eri tavalla.

Poiminta takaisinpanolla, kun poimintajärjestyksellä on väliä

- n-alkioisesta joukosta voidaan muodostaa

$$n^k$$

erilaista k-alkioista jonoa $(x_1, \ldots, x_k)$ takaisinpanolla.
- Perustelu: ensimmäinen alkio x_1 voidaan valita n eri tavalla; sen jälkeen toinen alkio x_2 voidaan valita n eri tavalla jne.

Poiminta ilman takaisinpanoa, kun poimintajärjestyksellä on väliä

- n-alkioisesta joukosta voidaan muodostaa

$$n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

  erilaista k-jonoa ($k \leq n$), kun kaikkien jonon alkioiden pitää olla erisuuria.
- Tällaisia jonoja kutsutaan ko. joukon k-permutaatioiksi (tai k-variaatioiksi).
- Perustelu: Ensimmäinen jonon alkio voidaan valita n erilaisella tavalla. Tämän jälkeen toinen alkio voidaan valita $(n-1)$:llä eri tavalla, sillä toisen alkion pitää olla eri suuri kuin ensimmäisen. Näin tehdään k valintaa, joissa aina edelliset valinnat on suljettu pois.

Kertoma

- Näin n-kertoma $n!$ määritellään kokonaisluvulle $n \geq 0$:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad \text{kun } n \geq 1, \text{ ja} \qquad 0! = 1. \tag{4}$$

- Kertoma $n!$ ilmaisee n-alkoisen joukon n-permutaatioiden, eli lyhyesti permutaatioiden lukumäärän: n alkiota voidaan järjestää $n!$ erilaisella tavalla.
- Kertoman avulla kirjoitettuna n-alkioisen joukon k-permutaatioita on

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Poiminta ilman takaisinpanoa, kun poimintajärjestyksellä ei ole väliä

- Kun nyt n-alkioisesta joukosta valitaan k alkiota ilman takaisinpanoa, niin tämä on sama asia kuin että valitaan kyseisen joukon k-alkioinen osajoukko.
- Näitä k-osajoukkoja kutsutaan myös ko. joukon *k-kombinaatioiksi*.
- Niiden lukumäärän ilmaisee binomikerroin n yli k:n,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{kun } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases} \tag{5}$$

- Perustelu: kukin tällainen osajoukko voidaan järjestää $k!$ eri tavalla k-jonoksi, jolloin saadaan generoitua kertaalleen kaikki ko. joukon k-permutaatiot.

Binomikaava

- Binomikaavan mukaan

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}, \tag{6}$$

  kun a ja b ovat reaalilukuja ja $n \geq 0$ on kokonaisluku.
- Binomikaava seuraa binomikertoimien kombinatorisesta luonnehdinnasta sekä reaalilukujen laskutoimitusten ominaisuuksista.

1.5 Multinomikertoimet

- Uusi tulkinta: $\binom{n}{k}$ kertoo kuinka monella tavalla n-alkioinen joukko voidaan osittaa kahteen osajoukkoon siten, että ensimmäiseen osaan tulee k alkiota ja toiseen osaan $n - k$ alkiota.
- Kuinka monta vaihtoehtoa on, jos n-alkioinen joukko ositetaan kolmeen osajoukkoon siten, että ensimmäiseen osaan tulee k_1 alkioita, toiseen osaan k_2 alkioita ja kolmanteen osaan k_3 alkiota?
- Jotta kysymys olisi mielekäs, oletetaan että kukin $0 \leq k_i \leq n$, ja että

$$k_1 + k_2 + k_3 = n.$$

Ensimmäiseen osaan k_1 alkioita, toiseen osaan k_2 alkioita ja kolmanteen osaan k_3 alkiota:

- Voimme valita ensimmäisen osajoukon alkiot $\binom{n}{k_1}$ tavalla;
- sen jälkeen toisen osan alkiot $\binom{n-k_1}{k_2}$ tavalla;
- kaikki jäljelle jääneet alkiot kuuluvat kolmanteen osaan.

Eri mahdollisuuksia on tuloperiaatteen nojalla yhteensä

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

Multinomikerroin

- Merkintä:

$$\binom{n}{k_1 k_2 k_3} = \binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

  Toisinaan alakerrassa olevat luvut erotetaan toisistaan selvyyden vuoksi pilkuilla, ja toisinaan taas pilkkuja ei käytetä.
- Tälle luvulle käytetään nimitystä trinomikerroin (tai yleisemmin, multinomikerroin).

Yleistys m osalle

- Olkoon annettuna luvut $k_1, \ldots, k_m$ siten, että kukin $0 \leq k_i \leq n$, ja
$$k_1 + \cdots + k_m = n.$$
- Miten monella eri tavalla n-alkioinen joukko voidaan osittaa m osaan $A_1, \ldots, A_m$ siten, että kussakin osassa A_i on k_i alkiota?
- Vastaavasti kuin aikasemmin nähdään, että eri mahdollisuuksia on
$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \tag{7}$$
kappaletta. Näitä lukuja kutsutaan multinomikertoimiksi.

KÄNKKÄRÄNKKÄ

- Kuinka monta erilaista 12-kirjaimista sanaa voidaan muodostaa sanan KÄNKKÄRÄNKKÄ kirjaimista? Kukin kirjain pitää käyttää kertaalleen.
- Vastaus: 83160
- Miten vastaukseen päädytään?

Huomautuksia multinomikertoimista

- Binomikerroin on multinomikertoimen erikoistapaus, sillä

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k,\, n-k}.$$

- Multinomikertoimet esiintyvät ns. multinomikaavassa, jonka mukaan

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}. \quad (8)$$

  Tässä kaavassa summataan yli kaikkien sellaisten ei-negatiivisten kokonaislukujen $k_1, k_2, \ldots, k_m$, joiden summa on n.
- Binomikaava (6) on multinomikaavan erikoistapaus.

1.6 Ehdollinen todennäköisyys

- Toisinaan saamme tapahtuneesta osittaista informaatiota, ja tämä informaatio voidaan esittää siinä muodossa, että tapahtuma B on sattunut, jossa $P(B) > 0$.
- Kun tämä tieto otetaan huomioon, niin jonkin muun tapahtuman A todennäköisyytenä ei enää pidetä sen alkuperäistä todennäköisyyttä $P(A)$ vaan sen sijaan lasketaan tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla B, joka määritellään kaavalla

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{jossa } P(B) > 0. \tag{9}$$

- $P(A \mid B)$ on tapahtuman A todennäköisyys, kun otetaan huomioon (täsmälleen se) että B on sattunut.

Esimerkki ehdollisesta todennäköisyydestä

- Kysymys: Heitetään kerran noppaa, ja silmäluku on parillinen. Millä todennäköisyydellä silmäluku on a) yksi b) kaksi?
- Vastaus: a) 0 b) $1/3$.
- Miten vastaukseen päädytään?

Kaavan selitystä

- Ehdollisen todennäköisyyden $P(A \mid B)$ kaavassa

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  uudeksi perusjoukoksi otetaan B, jonka ehdolliseksi todennäköisyydeksi $P(B \mid B)$ pitää saada yksi.
- Tämä saadaan aikaan normittamalla alkuperäinen todennäköisyys: se jaetaan ehdon B todennäköisyydellä.
- Koska B on sattunut, niin kaavassa lasketaan ei-ehdollisia todennäköisyyksiä vain joukon B osajoukoille $A \cap B$.

Ehdollisen todennäköisyyden $P(A \mid B)$ frekvenssitulkinta

- Tarkastellaan N-kertaista toistokoetta, jossa voi sattua A tai B tai molemmat.
- Tapahtuman A suhteellinen esiintymisfrekvenssi niissä kokeissa, joissa on sattunut tapahtuma B on

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N}{N(B)/N}.$$

- Frekvenssitulkinnan mukaan jälkimmäisessä muodossa osoittaja lähestyy todennäköisyyttä $P(A \cap B)$ ja nimittäjä todennäköisyyttä $P(B)$, kun N kasvaa rajatta.
- Siis ehdollisen todennäköisyyden $P(A \mid B)$ määritelmä osamääränä $P(A \cap B)/P(B)$ on järkeenkäypä.

Huomautuksia

- “Alkuperäiset”eli ei-ehdolliset todennäköisyydet $P(A)$ voidaan ymmärtää ehdollisina todennäköisyyksinä ehdolla Ω,

$$P(A \mid \Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1}.$$

- On mahdollista tarkistaa, että ehdollinen todennäköisyys $P(A \mid B)$ on argumentin A funktiona todennäköisyys, eli että se toteuttaa todennäköisyyden kolme aksioomaa, mistä seuraa että
- ehdolliselle todennäköisyydelle saadaan käyttää samoja laskusääntöjä (pystyviivan vasemmalla puolella esiintyvän argumentin suhteen), kuin tavalliselle todennäköisyydelle.

Kertolaskusääntö eli ketjusääntö

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmä voidaan kirjoittaa myös tulomuodossa,

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B). \tag{10}$$

- Tämä kaava on nimeltään todennäköisyyksien kertolaskusääntö eli kertolaskukaava. Siitä käytetään myös nimeä todennäköisyyslaskennan ketjusääntö.
- Mikäli $P(A) > 0$ ja $P(B) > 0$, on

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B) = P(A)\, P(B \mid A),$$

josta saadaan ratkaistua toinen ehdollisista todennäköisyyksistä, nimittäin

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A)}.$$

Kertolaskusääntö useammalle tapahtumalle

- Tarkastellaan kolmea tapahtumaa A, B ja C, ja oletetaan, että $P(A \cap B) > 0$. Tällöin myös $P(A) > 0$, ja

$$
\begin{aligned}
P(A)\,P(B \mid A)\,P(C \mid A \cap B) &= P(A)\,\frac{P(A \cap B)}{P(A)}\,\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \\
&= P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}
$$

- Jos tapahtumia on n kappaletta $A_1, \ldots, A_n$ ja $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, niin niiden leikkauksen todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
&\quad = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\
&\qquad \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Esimerkki

- Perusteellisesti sekoitetusta 52 kortin pakasta jaetaan kaksi korttia. Laske todennäköisyydet $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_2)$ ja $P(A_2 \mid A_1)$, kun

$$A_1 = \{\text{“1. kortti on ässä”}\}, \quad A_2 = \{\text{“2. kortti on ässä”}\}.$$

- Vastaus:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}, \qquad P(A_2 \mid A_1) = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 51} = \frac{1}{17}.$$

- Kaksi erityyppistä ratkaisua: kombinatorinen ratkaisu, ja kertolaskusääntöä hyödyntävä ratkaisu.
- Kombinatorisessa ratkaisussa pitää huolellisesti kertoa, mitä pidetään perusjoukkona. Kertolaskusääntöä käytettäessä ajatellaan suoraan (ehdollisia) todennäköisyyksiä

1.7 Tapahtumien riippumattomuus

Määritelmä (Kahden tapahtuman riippumattomuus)

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Tämä asia voidaan merkitä $A \perp\!\!\!\perp B$.

Tarkista, että ymmärrät, mitä eroa on seuraavilla käsitteillä.

a) A ja B ovat erillisiä tapahtumia,

b) A ja B ovat riippumattomia tapahtumia.

Riippumattomuus ja ehdollinen todennäköisyys

- Jos $P(B) > 0$ ja $A \perp\!\!\!\perp B$, niin

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A).$$

- Tulkinta: mikäli A ja B ovat riippumattomia, niin tieto B:n sattumisesta ei muuta A:n todennäköisyyttä.
- Toisaalta, jos $P(B) > 0$ ja $P(A \mid B) = P(A)$, niin $A \perp\!\!\!\perp B$, sillä tällöin

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B).$$

- Yhteenveto: jos $P(B) > 0$, on

$$A \perp\!\!\!\perp B \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \mid B) = P(A). \tag{12}$$

Esimerkki: kahden nopan heitto

- Perusjoukko on $\Omega = E \times E$, jossa $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sen alkeistapaukset ovat symmetrisiä, ja ensimmäinen koordinaatti kertoo ensimmäisen nopan silmäluvun ja toinen koordinaatti toisen nopan silmäluvun.
- Olkoot $1 \le i, j \le 6$, ja tarkastellaan tapahtumia

  $$A = \{\text{“nopan yksi tulos on } i\text{”}\}, \quad B = \{\text{“nopan kaksi tulos on } j\text{”}\}$$

- Tällöin

  $$P(A) = \frac{6}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36},$$

  ja

  $$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = P(A)\,P(B),$$

  joten $A \perp\!\!\!\perp B$.

Useamman tapahtuman riippumattomuus

Määritelmä

Tapahtumat $A_1, \ldots, A_n$ ovat riippumattomia, eli $A_1, \ldots, A_n \perp\!\!\!\perp$, jos kaikilla $k \geq 2$ on voimassa

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

aina kun $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ ovat keskenään erisuuria kokonaislukuja.

Esim. tapahtumat A, B ja C ovat riippumattomia, jos kaikki seuraavaat neljä ehtoa pätevät,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)\,P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)\,P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)\,P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)\,P(B)\,P(C). \end{aligned}$$

Ehdollinen riippumattomuus

Määritelmä (Ehdollinen riippumattomuus)

Olkoon C tapahtuma, jolle $P(C) > 0$. Tapahtumat A ja B ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla C, jos

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)\, P(B \mid C).$$

Tämä voidaan merkitä $(A \perp\!\!\!\perp B) \mid C$.

Ts. kaksi tapahtumaa ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla C, jos ne ovat riippumattomia ehdollisen todennäköisyyden $P(\cdot \mid C)$ mielessä. Ehdollisen riippumattomuuden käsite voidaan tietenkin yleistää useammalle kuin kahdelle tapahtumalle.

1.8 Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava

Määritelmä (Perusjoukon ositus)

Tapahtumat $B_1, \ldots, B_n$ muodostavat perusjoukon Ω *osituksen*, jos

- ne ovat erillisiä: $B_i \cap B_j = \emptyset$, kun $i \neq j$
- ne peittävät (eli tyhjentävät) Ω:n, eli $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$.

Kokonaistodennäköisyyden kaava

- Olkoon A tapahtuma ja $B_1, \ldots, B_n$ perusjoukon Ω ositus.
- Ositetaan A leikkamalla se kullakin joukoista B_i:

$$A = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n).$$

- Tässä osat $(A \cap B_1), \ldots, (A \cap B_n)$ ovat erillisiä, joten (additiivisuus ja kertolaskusääntö)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i). \tag{13}$$

Tämä on kokonaistodennäköisyyden kaava.

Bayesin kaava

- Olkoon A tapahtuma siten, että $P(A) > 0$, ja olkoon $B_1, \ldots, B_n$ perusjoukon Ω ositus.
- Jos tapahtuma A on sattunut, niin tapahtuman B_i (ehdollinen) tn on

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\, P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

- Kun tässä $P(A)$ vielä esitetään kokonaistodennäköisyyden kaavalla (13), saadaan Bayesin kaava

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)\, P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\, P(A \mid B_j)}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{14}$$

1.9 Monotoninen jatkuvuus

Lause (Todennäköisyyden monotoninen jatkuvuus)

Olkoon $B_1, B_2, \dots$ jono tapahtumia.

(a) Jos jono on kasvava, eli $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$, niin

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n \to \infty} P(B_n).$$

(b) Jos jono on laskeva, eli $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, niin

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n \to \infty} P(B_n).$$

Todistuksessa tarvitaan täysadditiivisuutta.