Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
4. harjoitus (26. 11. 2013)

1. Tarkastellaan autoregressiivistä mallia (ks. harj. 3, teht. 2). Muodosta parametrin (ϕ, σ^2) pistemääräfunktio ja havaittu informaatiomatriisi. Tutki, ovatko parametrit ϕ ja σ^2 ortogonaaliset.

2. Jatkoa edelliseen tehtävään. Johda suurimman uskottavuuden estimaattorin $\hat{\phi}$ lauseke. Järkeile ilman tarkkaa todistusta, että $\hat{\phi}$ ei yleensä ole harhaton, so. ei päde $\mathsf{E}(\hat{\phi}) = \phi$. Lisätehtävä innokkaille: todista tämä tarkasti tapauksessa $n = 2$, $\phi \neq 0$ ja $y_0 \neq 0$.

   Opetus. Yleisemmin muistiinpanojen sivujen 21–22 lineaarisessa mallissa estimaattori $\hat{\beta}$ (ks. yhtälö (2.18)) ei ole välttämättä harhaton, mikäli selittävien muuttujien vektorissa Z_i on mukana vastemuuttujan aikaisempia arvoja.

3. Jatkoa harjoituksen 3 tehtävään 4. Varmista suoralla laskulla, että lauseen 2.1(ii) tulos pätee: pistemäärä $s_n(\alpha, \beta; \boldsymbol{Y}_n)$ on martingaali informaatiojoukon $\boldsymbol{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ suhteen.

   Muista. Satunnaisvektori(jono) on martingaali jos ja vain jos sen jokainen komponentti on.

4. Tarkastellaan muistiinpanojen sivuilla 21–22 esitetyn lineaarisen mallin epälineaarista yleistystä, jossa yhtälön (2.16) sijasta pätee

   $$Y_i = g(Z_i; \beta) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

   Tässä Z_i on k-ulotteinen vektorin $(\boldsymbol{W}_{i-1}, X_i)$ osavektori, β on p-ulotteinen parametri ja $g(z; \beta)$ on tunnettua muotoa oleva funktio siten, että $\beta \mapsto g(z; \beta)$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Muilta osin oletetaan, että ehdollisen mallin yhteydessä esitetyt yleiset oletukset ovat voimassa ja virhetermit ε_i ovat kuten sivulla 22.

   a) Johda parametrin $\theta = (\beta, \sigma^2)$ ehdollinen uskottavuusfunktio $L^{(c)}(\theta; \boldsymbol{w})$ ja log-uskottavuusfunktio $l^{(c)}(\theta; \boldsymbol{w})$.

   b) Osoita, että parametrin β su-estimaatti $\hat{\beta}$ voidaan määrittää minimoimalla jäännösneliösummafunktio

   $$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - g(z_i; \beta)\big)^2$$

   ja että $\hat{\sigma}^2$ saadaan kaavasta $\hat{\sigma}^2 = S(\hat{\beta})/n$ (olettaen, että $\hat{\beta}$ on olemassa).

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske parametrin θ pistemääräfunktio ja havaittu informaatiomatriisi.