Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
2. harjoitus (12. 11. 2013)

1. Oletetaan, että mallin parametrivektorille θ (d-ulotteinen) on käytettävissä asymptoottisesti normaalinen estimaattori $\hat{\theta}_n$, jolle
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}_d(0, \Sigma(\theta_0)),$$
jossa $\Sigma(\theta_0)$ on positiivisesti definiitti (erityisesti kääntyvä) ja θ_0 on parametrin "todellinen" arvo. Osoita yksityiskohtaisesti, että jos funktio $\theta \mapsto \Sigma(\theta)$ on jatkuva pisteessä θ_0, niin
$$n(\hat{\theta}_n - \theta_0)'\Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \chi^2_d.$$
Johda tähän perustuva approksimatiivinen testi nollahypoteesille $\theta = 0$.

   [*Vihjeet.* Lause 1.1 ja seuraus 1.2. Tarvinnet myös 1. harjoitusten 3. tehtävän tulosta. Lineaaristen mallien kurssilla on osoitettu, että $Z'\Sigma^{-1}Z \sim \chi^2_k$, jos $Z \sim \mathsf{N}_k(0, \Sigma)$.]

2. Jatkoa 1. harjoitusten 4. tehtävään (delta-menetelmän todistus). Päättele "standardoidun" satunnaismuuttujan
$$\frac{\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0))}{h'(\hat{\theta}_n)\sigma(\hat{\theta}_n)}$$
asymptoottinen jakauma, kun oletetaan, että funktio $\theta \mapsto \sigma(\theta)$ on jatkuva θ_0:ssa. [*Apu.* Samat luentomuistiinpanojen lauseet kuin aikaisemmassa tehtävässä.]

   Tämä tehtävä osoittaa, että delta-menetelmän alun perin tuottaman asymptoottisen jakauman varianssi (joka riippui tuntemattomasta parametriarvosta θ_0) voidaan estimoida.

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ riippumaton otos Poisson-jakaumasta, jonka odotusarvo on μ. Johda (palauta mieleen) estimaattorin $\hat{\mu}_n = \overline{Y}_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ asymptoottinen jakauma. Johda sitten delta-menetelmän avulla muunnosten $\log \hat{\mu}_n$ ja $\sqrt{\hat{\mu}_n}$ asymptoottiset jakaumat. Mikä miellyttävä piirre jälkimmäiseen liittyy?

4. Näytä, että luentomuistiinpanojen esimerkin 1.1 (sivulla 12) kohtien (ii) ja (iii) jonot ovat todella MD-jonoja. Huom: jonoja $\{X_i\}$ ja $\{Z_i\}$ koskeva riippumattomuusoletus on ymmärrettävä siten, että kumpikin jonoista koostuu riippumattomista satunnaismuuttujista ja lisäksi jonot ovat riippumattomat toisistaan. Ovatko kaikki esimerkissä mainitut oletukset todella tarpeen?

5. Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ k-ulotteisista satunnaisvektoreista koostuva MD-jono jonkin informaation $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ suhteen ja $M_n = X_1 + \cdots + X_n$ kaikilla $n \geq 1$. Osoita muistiinpanojen sivulla 12 mainittu tulos, jonka mukaan kovarianssimatriiseille pätee
$$\mathsf{Cov}(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Cov}(X_i).$$
Voit olettaa, että $\mathsf{E}(X_1) = 0$.