Tilastollisen päättelyn jatkokurssi
1. harjoitus (5. 11. 2013)

1. a) Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja Z satunnaisvektoreita (samaa dimensiota). Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} Z$ jos ja vain jos $\|X_n - Z\| \xrightarrow{p} 0$. [*Muista.* Vektoreiden stokastinen suppeneminen on alun perin määritelty komponenteittain.]
   b) Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja $Y_1, Y_2, \dots$ satunnaisvektoreita, joille pätee $\|X_n\| \leq \|Y_n\|$ kaikilla n ja $Y_n \xrightarrow{p} 0$. Näytä, että $X_n \xrightarrow{p} 0$. Tässä 0 on nollavektori, joka on samaa dimensiota kuin X_n ja vastaavasti Y_n.

2. Olkoot $X_1, X_2, \dots$ ja Z reaaliarvoisia satunnaismuuttujia. Osoita (vetoamatta luentojen lauseisiin):

   a) Jos $X_n \xrightarrow{p} Z$, niin $X_n \xrightarrow{d} Z$.

   b) Jos $X_n \xrightarrow{d} c$, jossa c on reaalinen vakio, niin $X_n \xrightarrow{p} c$.

   Käytä tarvittaessa todennäköisyyslaskennan kirjallisuutta apuna.

3. Oletetaan, että $\theta_0 \in \mathbb{R}$ on tarkasteltavan tilastollisen mallin parametrin ”todellinen” arvo ja $\hat{\theta}_n$ on sen *asymptoottisesti normaalinen* estimaattori, jolle pätee
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, \sigma^2(\theta_0)),$$
   jossa $\sigma^2(\theta_0)$ on θ_0:sta riippuva positiivinen luku. Osoita, että $\hat{\theta}_n$ on *tarkentuva* eli $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0$.

   [*Vihje.* Seuraus 1.1 ja tehtävä 2 edellä.]

4. Oletetaan, että parametriavaruus $\Theta \subset \mathbb{R}$ on avoin väli, $\theta_0 \in \Theta$ ja $\hat{\theta}_n$ on θ_0:n asymptoottisesti normaalinen estimaattori kuten edellisessä tehtävässä. Todista *delta-menetelmän* tulos (monisteen s. 5 ja 6): jos $h\colon \Theta \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $h'(\theta_0) \neq 0$, niin
$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0)) \xrightarrow{d} \mathsf{N}(0, [h'(\theta_0)]^2\, \sigma^2(\theta_0)).$$
   [*Ohje.* Väliarvolauseen mukaan $h(\hat{\theta}_n) - h(\theta_0) = h'(\theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta_0)$, jossa θ_n^* on θ_0:n ja $\hat{\theta}_n$:n välissä. Käytä tehtävien 1 ja 3 tuloksia, lausetta 1.1 ja seurausta 1.1.]

5. Olkoon $\Theta = \mathbb{R}$, $\theta_0 = 0$ ja $\hat{\theta}_n$ kuten tehtävässä 3. Funktio $h(\theta) = \theta^2$ ei toteuta delta-menetelmän oletusta $h'(\theta_0) \neq 0$. Osoita, että nyt pätee

   a) $\sqrt{n}h(\hat{\theta}_n) = \sqrt{n}\hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{p} 0$

   b) $nh(\hat{\theta}_n) = n\hat{\theta}_n^2 \xrightarrow{d} \sigma^2(0)\chi_1^2$.

   Opetus. Oletus $h'(\theta_0) \neq 0$ on tärkeä delta-menetelmän mielekkyyden kannalta. Tässä tapauksessa muuttujan $h(\hat{\theta}_n)$ asymptoottisen jakauman muoto saatiin kuitenkin näkyviin valitsemalla ”lihotuskertoimeksi” $\sqrt{n}$:n sijasta n.

   [*Muista.* Määritelmän mukaan $Z^2 \sim \chi_1^2$, kun $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$.]

Lisäpisteitä saa tehtävien ratkaisemisesta 1, 2, 3 tai 4, jos ratkaisee vastaavasti 20, 40, 60 tai 80 prosenttia annetuista tehtävistä. Tämä edellyttää läsnäoloa harjoitusryhmässä ja valmiutta esittää ratkaisu taululla. Lisäpisteet ovat voimassa yleistenteissä 17. 12. 2013 ja 23. 1. 2014.