Riskiteoria 23.1.2014

1. Olkoon X_i yhdistetty muuttuja parametrilla (K_i, S), $i = 1, 2$. Oletetaan, että kaikilla $x > 0$,

$$\mathbb{P}(K_2 > x) > \mathbb{P}(K_1 > x)$$

ja että $S(0) < 1$. Osoita, että kaikilla $x > 0$,

$$\mathbb{P}(X_2 > x) > \mathbb{P}(X_1 > x).$$

2. Yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q, S). Olkoon $\lambda = 100$, yksittäisen vahingon suuruus eksponenttijakautunut parametrilla 1 ja $\mathbb{P}(Q = 0.8) = \mathbb{P}(Q = 1.2) = 1/2$. Tulevan vuoden vakuutusmaksu on $P = 110$.

Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on korkeintaan 0.01. Määrää minimaalinen vaatimuksen täyttävä alkupääoma soveltamalla normaaliapproksimaatiota kokonaisvahinkomäärän ehdollisiin jakaumiin ehdolla $Q = 0.8$ ja $Q = 1.2$.

Standardin normaalijakauman kertymäfunktiolle ϕ voidaan käyttää seuraavia approksimaatioita: $\phi(2.05) = 0.98$, $\phi(2.33) = 0.99$ ja $\phi(x) = 1$, kun $x \geq 3$.

3. Yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X on yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S). Yhtiöllä on koko kantaa koskeva jälleenvakuutussopimus, jossa jälleenvakuuttaja maksaa kustakin vahingosta rajan M ylittävän osan, mutta kuitenkin korkeintaan määrän A, missä M ja A ovat positiivisia vakioita.

Määrää ensivakuuttajan vastuulla olevan yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio parametrien M ja A sekä kertymäfunktion S avulla.

4. Vahinkoja sattuu homogeenisen Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio 1. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa vuoden 1 alussa. Olkoon M_n vuonna n maksettavien korvausten määrä, $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon edelleen yhtiön alkupääoma vuoden 1 alussa u ja U_n korvausvastuu vuoden n lopussa.

a) Määrää $\mathbb{E}(M_n)$ ja $\mathrm{Var}(M_n)$, $n = 1, 2$.

b) Esitä keskeiseen raja-arvolauseeseen perustuva tarkastelu vararikkotodennäköisyyden $\mathbb{P}(U_1 > u - M_1 | M_1)$ arvioimiseksi vuoden 1 lopussa, kun yhtiö on tällöin korvannut m vahinkoa.

5. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon $(1 + v)\mathbb{E}(X)$. Yhtiöllä on hetkellä 0 käytettävissään alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T < \infty) \leq 0.01,$$

kun $U_0 = 60$, $v = 0.1$, $a = 2$ ja $\lambda > 0$.

Riskiteoria 23.1.-14

1. Ratkaisu on sama kuin harjoitusten 3 tehtävässä 3.

2. $P(X > U_0 + P) = \frac{1}{2} P(X > U_0 + P \mid Q = 0.8) + \frac{1}{2} P(X > U_0 + P \mid Q = 1.2)$

Ehdolla $Q = q$ X on $gP-(\lambda q, s)$, $E(X|q) = \lambda q$, $Var(X|q) = \lambda q \cdot 2$.

$$\Rightarrow P(X > U_0 + P) \approx \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{U_0 + P - 0.8\lambda}{\sqrt{0.8\lambda \cdot 2}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{U_0 + P - 1.2\lambda}{\sqrt{1.2\lambda \cdot 2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{160}} + \frac{30}{\sqrt{160}}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{240}} - \frac{10}{\sqrt{240}}\right)\right)$$

Jos $U_0 \le 10$, niin

$$P(X > U_0 + P) \ge \frac{1}{2}(1 - \Phi(0)) = \frac{1}{4}.$$

Oltava siis $U_0 > 10$, jolloin $\Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{160}} + \frac{30}{\sqrt{160}}\right) \ge \Phi(3) \approx 1$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{U_0}{\sqrt{240}} - \frac{10}{\sqrt{240}}\right) = 0.02 \Rightarrow$$

$$\frac{U_0}{\sqrt{240}} - \frac{10}{\sqrt{240}} = 2.05 \quad \Rightarrow \quad U_0 \approx 41.8.$$

3. $z < M$: $\quad Z^{ov} \le z \Leftrightarrow Z \le z$

$z = M$: $\quad Z^{ov} \le M \Leftrightarrow Z \le M + \Lambda$

$z > M$: $\quad Z^{ov} \le z \Leftrightarrow Z \le M + \Lambda + (z - M) = \Lambda + z$

Siis

$$S^{ov}(z) = \begin{cases} S(z), & z < M \\ S(M + \Lambda), & z = M \\ S(z + \Lambda), & z > M \end{cases}$$

4. Kts. koe 1, tehtävä 4.

5. $c(s) = \lambda(e^{as}-1) - (1+v)\lambda a s$

$$= \lambda\left[e^{as}-1-(1+v)as\right], \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Jos $R>0$: $e^{aR}-1-(1+v)aR = 0$, niin

$$\mathbb{P}(T<\infty) \le e^{-Ru_0} = e^{-60R} \le 0{,}01$$

$$\Leftrightarrow R \ge -\frac{\log 0{,}01}{60}$$

Kun $a=2$, on

$$e^{as}-1-(1+v)as \approx -0{,}003 < 0, \text{ kun } s = -\frac{\log 0{,}01}{60}.$$

Selvästi $c(s) \to \infty$, kun $s \to \infty$, joten todella $c(R)=0$ eräälle $R>0$ ja $R > -\frac{\log 0{,}01}{60}$.