Riskiteoria 17.12.2013

1. Olkoon K_i painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ_i, Q_i), $i = 1, 2$. Oletetaan, että Q_1 ja Q_2 ovat samoin jakautuneita ja että $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Osoita, että kaikilla $x > 0$,

$$\mathbb{P}(K_2 > x) > \mathbb{P}(K_1 > x).$$

2. Markkinoilla toimivan yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, jos vararikkotodennäköisyys vuoden aikajänteellä on pienempi kuin ϵ. Tarvittavaa alkupääomaa approksimoidaan suureella

$$\mu + y\sigma - P,$$

missä y on yhtiöstä riippumaton vakio, μ ja σ ovat yhtiön tulevaa vuotta koskevat kokonaisvahinkomäärän odotusarvo ja hajonta ja P on tulevaa vuotta koskeva vakuutusmaksu.

Yhtiön i kokonaisvahinkomäärän odotusarvo ja hajonta ovat μ_i ja σ_i ja vakuutusmaksu on P_i, $i = 1, 2$. Osoita, että yhtiöiden fuusioituessa tarvittava alkupääoma on korkeintaan erillisten yhtiöiden alkupääomavaatimusten summa.

3. Yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X on yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S). Yhtiöllä on koko kantaa koskeva fransiisijälleenvakuutus, jossa jälleenvakuuttaja korvaa koko vahingon, jos se ylittää sopimuksen mukaisen rajan M. Jos vahinko on korkeintaan M, ei jälleenvakuuttaja korvaa mitään. Olkoot $Z_1, Z_2, \ldots$ toteutuneet vahinkojen suuruudet ja olkoon

$$\bar{K} = \#\{i \leq K | Z_i > M\}$$

jälleenvakuuttajan nollaa suurempien vahinkojen lukumäärä. Oletetaan, että $S(M) \in (0, 1)$.

a) Johda esitys todennäköisyydelle

$$\mathbb{P}(\bar{K} = k | K = h), \quad h = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, h.$$

b) Oletetaan, että K on Poisson-jakautunut. Osoita, että myös $\bar{K}$ on Poisson-jakautunut.

4. Vahinkoja sattuu homogeenisen Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetillä λ ja yksittäisen vahingon suuruus on vakio 1. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0, 1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa vuoden 1 alussa. Olkoon M_n vuonna n maksettavien korvausten määrä, $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon edelleen yhtiön alkupääoma vuoden 1 alussa u ja U_n korvausvastuu vuoden n lopussa.

a) Määrää $\mathbb{E}(M_n)$ ja $\text{Var}(M_n)$, $n = 1, 2$.

b) Esitä keskeiseen raja-arvoluaseeseen perustuva tarkastelu vararikkotodennäköisyyden $\mathbb{P}(U_1 > u - M_1 | M_1)$ arvioimiseksi vuoden 1 lopussa, kun yhtiö on tällöin korvannut m vahinkoa.

5. Yhtiön i vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot $\xi_1(i), \xi_2(i), \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, $i = 1, 2$. Olkoon c_i yhtiön i kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että $c_i'(0) < 0$ ja että $c_i(s) \to \infty$, kun $s \to \infty$, $i = 1, 2$. Olkoon $T_i(U_0)$ yhtiön i vararikkohetki alkupääomalla U_0.

Oletetaan, että $\mathbb{P}(\xi_1(1) > v) > \mathbb{P}(\xi_1(2) > v)$, $\forall v \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T_2(U_0) < \infty) < \mathbb{P}(T_1(U_0) < \infty),$$

kunhan U_0 on riittävän suuri.

Riskiteoria 17.12.-13

1. $$\mathbb{P}(K_2 > x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(K(\lambda_2 q) > x)\, dH(q),$$

missä $K(\lambda_2 q) \sim$ Poisson-$\lambda_2 q$. Harj. 1, teht. 6 ⇒

$$\mathbb{P}(K(\lambda_2 q) > x) > \mathbb{P}(K(\lambda_1 q) > x), \quad \forall x > 0 \quad (q \neq 0)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(K_2 > x) > \int_0^\infty \mathbb{P}(K(\lambda_1 q) > x)\, dH(q) = \mathbb{P}(K_1 > x).$$

2. Fuusiossa syntyneen yhtiön alinpääomavaatimus on

$$U_\varepsilon = \mu_1 + \mu_2 + y\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}} - P_1 - P_2,$$

missä $\sigma_{12} = \mathrm{cov}(X_1, X_2)$, X_i yhtiön i kokonaisvahinkomäärä. Nyt $\sigma_{12} \le \sigma_1 \sigma_2$ (luennot s. 43), joten

$$U_\varepsilon \le \mu_1 + y\sigma_1 - P_1 + \mu_2 + y\sigma_2 - P_2.$$

3. $\bar{K}$ on sama kuin XL-sopimuksessa rajalle M. Vaaditut todistukset löytyvät lauseesta 7.1.1 ja seurauksesta 7.1.2.

4. a) Seuraus 8.3.1 $\Rightarrow$ M_1 on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\lambda_1 = \int_0^1 \lambda\, G(1-s)\,ds$$

ja M_2 on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\lambda_2 = \int_0^2 \lambda\big(G(2-s) - G(1-s)\big)\,ds.$$

$$\lambda_1 = \lambda \int_0^1 (1-s)\,ds = \lambda/2,$$

$$\lambda_2 = \lambda\Big[\int_0^1 (1-(1-s))\,ds + \int_1^2 (2-s)\,ds\Big] = \lambda$$

$\mathbb{E}(M_n) = \operatorname{Var} M_n = \lambda_n$

b) U_1 on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\lambda_3 = \int_0^1 \lambda\,(1 - G(1-s))\,ds = \lambda/2,$$

Koska $U_1 \perp\!\!\!\perp M_1$, voidaan approksimoida

$$\mathbb{P}(U_1 > u - M_1 \mid M_1 = m) = \mathbb{P}(U_1 > u - m)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\frac{U_1 - \lambda_3}{\sqrt{\lambda_3}} > \frac{u - m - \lambda_3}{\sqrt{\lambda_3}}\Big) \approx 1 - \phi\Big(\frac{u-m-\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3}}\Big).$$

5. $c_1(s) = \log \mathbb{E}(e^{s S_1(1)}) = \log \int_0^\infty \mathbb{P}(e^{s S_1(1)} > x)\,dx$

$$= \log \int_0^\infty \mathbb{P}\Big(S_1(1) > \frac{\log x}{s}\Big)\,dx > \log \int_0^\infty \mathbb{P}\Big(S_1(2) > \frac{\log x}{s}\Big)\,dx = c_2(s)$$

Siis $R_1 > R_2$. Jos $R \in (R_2, R_1)$, niin lauseen 9.1.1 nojalla (kaava 9.1.2)

$$\mathbb{P}(T_1(U_0) < \infty) > e^{-RU_0} > \mathbb{P}(T_2(U_0) < \infty),$$

kun U_0 on suuri.