Riskiteoria

Harri Nyrhinen, Helsingin yliopisto

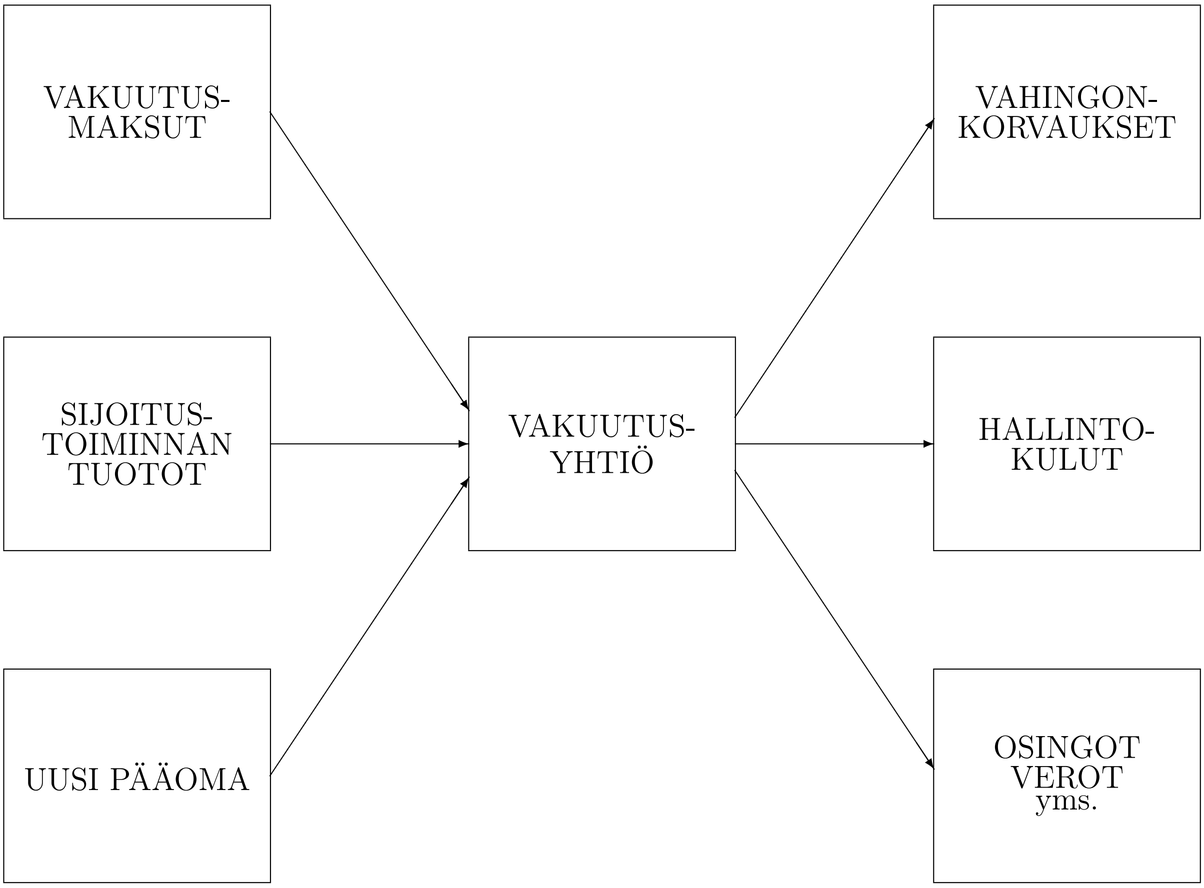
Syksy 2013

Sisältö

1 Johdanto

Tarkastellaan lyhyesti vakuutustoiminnan luonnetta ja vakuuttamisen motiivia. Ajatellaan esimerkkinä joukkoa samankaltaisia omakotitaloja ja näiden tulipaloriskiä. Yksittäiselle talon omistajalle tulipalo merkitsee suurta taloudellista menetystä. Suojautuminen tällaista riskiä vastaan omin voimin esimerkiksi vararahaston avulla ei ole realistista. Tavallisesti ongelma ratkaistaan ottamalla palovakuutus. Tällöin kukin talon omistaja suorittaa vakuutusyhtiölle *vakuutusmaksun*, joka vastaa likimain keskimääräistä yhdelle talolle syntyvää taloudellisten menetysten määrää esimerkiksi yhden vuoden aikana. Vakuutusyhtiö sitoutuu korvaamaan tulipalojen aiheuttamat menetykset saamaansa vakuutusmaksua vastaan. Tällä tavalla riski on siirtynyt vakuutusyhtiölle ja talojen omistajat ovat suojautuneet satunnaisia suuria menetyksiä vastaan kohtuullisella deterministisellä vakuutusmaksulla. Vakuutusyhtiöllä puolestaan on suuri joukko *riskejä* vastattavanaan. Suurten lukujen lain avulla voidaan perustella sitä, että yhtiö selviää riskeistä kohtuullisen vakuutusmaksuihin sisältyvän marginaalin avulla.

Edellä on jo esitetty kaksi merkittävää vakuutustoimintaan liittyvää rahavirtaa, nimittäin korvaukset ja vakuutusmaksut. Toimintaan sisältyy monia muitakin rahavirtoja. Näitä havainnollistaa seuraava kaavio.



Kurssi painottuu vahingonkorvausten tarkasteluun. Tavoitteena on antaa vastauksia mm. seuraaviin kysymyksiin:

- millainen on vahinkojen korvausprosessi
- miten arvioidaan yhtiön vakavaraisuutta.

Luonteeltaan ja painotuksiltaan kurssi sopii parhaiten vahinkovakuutuksen tarpeisiin. Henki- ja eläkevakuutuksen erityispiirteitä ei tarkastella.

Kurssin päälähde on osa I kirjasta DPP:
Daykin, C., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. (1994). Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman & Hall, London.

2 Kertausta todennäköisyyslaskennasta

Kurssin keskeisin tarkastelukohde on edellä esitelty vahinkojen korvausprosessi tai lyhyemmin, *vahinkoprosessi*. Tämä on luontevaa mallintaa satunnaissuureeksi. Korvauksia tullaan jatkossa tarkastelemaan tilanteesta riippuen satunnaismuuttujana tai stokastisena prosessina.

Esitetään kertauksena eräitä todennäköisyysteorian käsitteitä ja tuloksia.

1. Todennäköisyyskenttä
Todennäköisyyskenttä on kolmikko $(\Omega, S, \mathbb{P})$, missä

Ω on perusjoukko (alkeistapaukset).
S on sigma-algebra Ω:lla (tietyt vaatimukset täyttävä kokoelma Ω:n osajoukkoja). S:n joukkoja kutsutaan tapahtumiksi.
$\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta (liittää todennäköisyyden jokaiseen S:n joukkoon).

2. Satunnaismuuttuja
Mitallista kuvausta $\xi : (\Omega, S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ kutsutaan *satunnaismuuttujaksi*, missä $\mathcal{B}$ tarkoittaa $\mathbb{R}$:n Borel-joukkoja. Jatkossa reaaliarvoisen funktion mitallisuudesta puhuttaessa $\mathbb{R}$ varustetaan aina Borel-sigma-algebralla $\mathcal{B}$.

3. Jakauma
Satunnaismuuttujan ξ *jakauma* P on todennäköisyysmitta $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$:llä, joka määräytyy ehdosta

$$P(B) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B)$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}$. Jos satunnaismuuttujilla ξ ja η on sama jakauma, merkitään

$$\xi =_L \eta.$$

4. Kertymäfunktio, tiheysfunktio ja pistetodennäköisyysfunktio
Satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktio* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään ehdosta

$$F(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x) = P((-\infty, x]).$$

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ξ:n *tiheysfunktio*, jos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin ξ:n jakaumaa sanotaan *jatkuvaksi*. Jakauma on *diskreetti*, jos ξ keskittyy korkeintaan numeroituvaan joukkoon ts. jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots$ että

$$\mathbb{P}(\xi \in \{x_1, x_2, \ldots\}) = 1.$$

Tällöin jakauman *(piste)todennäköisyysfunktio* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään ehdosta

$$g(x) = \mathbb{P}(\xi = x).$$

Jatkossa esiintyy usein jatkuvan ja diskreetin jakauman sekoituksia. Tällöin kertymäfunktio on muotoa

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt + \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(\xi = x_i). \tag{2.1}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

5. Odotusarvo, varianssi ja muut momentit

Satunnaismuuttujan ξ *odotusarvo* on

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

edellyttäen, että $\mathbb{E}(|\ \xi\ |)$ on äärellinen. Jos $\xi \geq 0$ melkein varmasti, sallitaan myös $+\infty$ odotusarvoksi. Tällöin $\mathbb{E}(\xi)$ on määritelty kaikille ei-negatiivisille satunnaismuuttujille.

Olkoon $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltainen mitallinen funktio. Jos odotusarvo $\mathbb{E}(|\ h(\xi)\ |)$ on äärellinen ja F on ξ:n kertymäfunktio, niin

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x).$$

Jos lisäksi ξ:llä on tiheysfunktio f, niin

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx.$$

Jos ξ:n jakauma on diskreetti ja g on ξ:n todennäköisyysfunktio, niin

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)h(x_i),$$

missä oletetaan, että $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) = 1$. Jatkuvan ja diskreetin jakauman sekoitukselle (2.1) pätee

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_i)h(x_i).$$

Satunnaismuuttujan ξ *n. origomomentti* a_n on

$$a_n = \mathbb{E}(\xi^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$$

edellyttäen, että $\mathbb{E}(|\ \xi^n\ |)$ on äärellinen, $n = 1, 2, \ldots$. Erityisesti $a_1 = \mathbb{E}(\xi)$. Tätä merkitään usein myös symbolilla μ tai μ_ξ. Vastaavasti n. *keskusmomentti* μ_n on

$$\mu_n = \mathbb{E}((\xi - a_1)^n), \ \ n \geq 2.$$

Erityisesti ξ:n *varianssi* on

$$\sigma_\xi^2 = \mathrm{Var}(\xi) = \mu_2$$

ja *(keski)hajonta* $\sigma_\xi = \sqrt{\mu_2}$. *Vinous* γ_ξ määritellään ehdosta

$$\gamma_\xi = \mathbb{E}((\xi - a_1)^3)/\sigma^3 = \mu_3/\sigma^3.$$

6. Momentit generoiva funktio

Satunnaismuuttujan ξ *momentit generoiva funktio* $M = M_\xi$ on kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, joka määräytyy ehdosta

$$M_\xi(s) = \mathbb{E}(e^{s\xi}).$$

Kumulantit generoiva funktio $c = c_\xi$ on kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, joka määräytyy ehdosta

$$c_\xi(s) = \log M_\xi(s).$$

Molemmat funktiot ovat aina määriteltyjä. Seuraavat tulokset pätevät.

a) Jos satunnaismuuttujien ξ ja η momentit generoivat funktiot ovat äärellisiä ja yhtyvät jossain $\mathbb{R}$:n avoimessa joukossa, niin niiden jakaumat yhtyvät.

b) Olkoot ξ ja η *riippumattomia* satunnaismuuttujia ts.

$$\mathbb{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A)\mathbb{P}(\eta \in B)$$

kaikilla $A, B \in \mathcal{B}$, merkitään $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$. Tällöin

$$M_{\xi+\eta}(s) = M_\xi(s)M_\eta(s)$$

ja

$$c_{\xi+\eta}(s) = c_\xi(s) + c_\eta(s)$$

kaikilla $s \in \mathbb{R}$.

c) Momentit generoiva on äärettömän monta kertaa derivoituva äärellisyysalueensa sisäpisteissä. Jos s on tällainen, niin n. derivaatta $M_\xi^{(n)}(s)$ on

$$M_\xi^{(n)}(s) = \mathbb{E}\left(\xi^n e^{s\xi}\right).$$

Jos erityisesti M_ξ on äärellinen eräässä origon ympäristössä, niin

$$M_\xi^{(n)}(0) = \mathbb{E}(\xi^n)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$c'_\xi(0) = \mathbb{E}(\xi)$$

ja

$$c_\xi^{(n)}(0) = \mathbb{E}((\xi - a_1)^n) = \mu_n, \;\; n = 2, 3.$$

Jos $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$, niin aina

$$\lim_{s \to 0-} M_\xi^{(n)}(s) = \mathbb{E}(\xi^n).$$

7. Ehdollinen odotusarvo

Olkoot ξ ja η satunnaismuuttujia ja $\mathbb{E}(\xi)$ äärellisenä olemassa. Olkoon $\sigma(\eta)$ η:n generoima sigma-algebra ts. suppein S:n alisigma-algebra, jonka suhteen η on mitallinen.

Satunnaismuuttujan ξ *ehdollinen odotusarvo* η:n suhteen on sellainen satunnaismuuttuja $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$, että

(i) $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ on $\sigma(\eta)$ – mitallinen

(ii) $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi \mid \eta)\mathbb{1}(\eta \in B)\} = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(\eta \in B))$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$.

Kohdassa (ii) $\mathbb{1}$ tarkoittaa indikaattorifunktiota ts. $\mathbb{1}(\eta \in B)(\omega) = 1$, kun $\eta(\omega) \in B$ ja 0 muuten. Voidaan osoittaa, että $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ on olemassa ja yksikäsitteinen m.v. (melkein varmasti, nollamittaisessa joukossa $\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$ voidaan määritellä vapaasti). Lisäksi on olemassa sellainen mitallinen kuvaus $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että $\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = h(\eta)$. Intuitiivisesti, $h(y)$ edustaa ξ:n keskimäärää, kun η:lla on arvo y. Usein käytetään merkintää $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y) = h(y)$.

Ehdollisella odotusarvolla on seuraavat ominaisuudet (oletetaan, että tarpeelliset odotusarvot ovat äärellisenä olemassa).

a) $\mathbb{E}(a\xi_1 + b\xi_2 \mid \eta) = a\mathbb{E}(\xi_1 \mid \eta) + b\mathbb{E}(\xi_2 \mid \eta)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi \mid \eta)\} = \mathbb{E}(\xi)$

c) Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen, niin $\mathbb{E}(f(\eta)\xi \mid \eta) = f(\eta)\mathbb{E}(\xi \mid \eta)$

d) Jos $\xi \perp\!\!\!\perp \eta$, niin $\mathbb{E}(\xi \mid \eta) = \mathbb{E}(\xi)$

e) Jos $\xi_1 \leq \xi_2$, niin $\mathbb{E}(\xi_1 \mid \eta) \leq \mathbb{E}(\xi_2 \mid \eta)$.

Kaikki mainitut tulokset pätevät vain melkein varmasti.

Ehdollinen todennäköisyys η:n suhteen annetulle joukolle $B \in \mathcal{B}$ määritellään ehdosta

$$\mathbb{P}(\xi \in B \mid \eta) = \mathbb{E}(\mathbb{1}(\xi \in B) \mid \eta).$$

Merkitään myös $\mathbb{P}(\xi \in B \mid \eta = y) = k(y)$, jos $\mathbb{P}(\xi \in B \mid \eta) = k(\eta)$.

Olkoon F_η satunnaismuuttujan η kertymäfunktio. Tällöin on olemassa sellainen perhe kertymäfunktioita $\{F_{\xi|\eta}(\cdot \mid y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ns. ξ:n *säännöllinen ehdollinen kertymäfunktio* (tai *säännöllinen ehdollinen jakauma*) η:n suhteen, että

(i) $F_{\xi|\eta}(\cdot \mid y)$ on kertymäfunktio kaikilla $y \in \mathbb{R}$

(ii) $F_{\xi|\eta}(x \mid \cdot)$ on mitallinen kaikilla $x \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{P}(\xi \le x, \eta \le y) = \int_{u \le y} F_{\xi|\eta}(x \mid u) dF_\eta(u)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Jos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $h(\xi) \in L$, niin

$$\mathbb{E}(h(\xi) \mid \eta = y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} h(x) dF_{\xi|\eta}(x \mid y).$$

Yksinkertaisissa tapauksissa ehdollinen odotusarvo ja todennäköisyys voidaan määrätä elementaarisesti. Jos esimerkiksi ξ ja η ovat molemmat diskreettejä ja ξ keskittyy joukkoon $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ja η joukkoon $\{y_1, y_2, \ldots\}$, niin

$$\mathbb{P}(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)/\mathbb{P}(\eta = y_j),$$

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y_j) = \mathbb{P}(\xi \le x \mid \eta = y_j) = \mathbb{P}(\xi \le x, \eta = y_j)/\mathbb{P}(\eta = y_j)$$

ja

$$\mathbb{E}(h(\xi) \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x_i \mid \eta = y_j) h(x_i)$$

kaikilla $i, j = 1, 2, \ldots$ ja $x \in \mathbb{R}$.

Ehdollisen odotusarvon käsite voidaan laajentaa suoraviivaisesti koskemaan ehdollistusta satunnaismuuttujajoukon suhteen tai vielä yleisemmin, mielivaltaisen S:n alisigma-algebran suhteen. Olkoon nimittäin $\mathcal{F}$ tällainen. Satunnaismuuttuja $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ on ξ:n ehdollinen odotusarvo sigma-algebran $\mathcal{F}$ suhteen, jos

(i) $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ on $\mathcal{F}-$ mitallinen

(ii) $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F})\mathbb{1}(A)\} = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}(A))$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.

Tämä yleistää edellä esitetyn ehdollisen odotusarvon satunnaismuuttujan suhteen, sillä

$$\sigma(\eta) = \{\eta^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Yleinen ehdollinen odotusarvo on myös olemassa ja yksikäsitteinen, jos $\mathbb{E}(\xi)$ on äärellinen. Edellä esitetyt ominaisuudet a), b) ja e) pätevät myös. Jos $\mathcal{F}$ on $\mathcal{G}$:n alisigma-algebra, niin lisäksi

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})|\mathcal{F}).$$

Kohta c) pätee muodossa

c') Jos ζ on $\mathcal{F}$-mitallinen satunnaismuuttuja, niin $\mathbb{E}(\zeta\xi \mid \mathcal{F}) = \zeta\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F})$.

Jos erityisesti $\eta_1, \ldots, \eta_N$ ovat satunnaismuuttujia ja $\mathcal{F} = \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ on näiden generoima S:n alisigma-algebra (suppein sigma-algebra, jonka suhteen kaikki kyseiset muuttujat ovat mitallisia), niin on olemassa sellainen mitallinen kuvaus $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, että

$$\mathbb{E}(\xi| \, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_N)) = h(\eta_1, \ldots, \eta_N).$$

Tässä siis $\mathbb{R}^N$ varustetaan myös Borel-joukoilla. Säännöllinen ehdollinen kertymäfunktio on myös tällöin olemassa. Merkitään jatkossa lyhyesti

$$\mathbb{E}(\xi |\, \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_N)) = \mathbb{E}(\xi |\, \eta_1, \ldots, \eta_N).$$

8. Suurten lukujen lait

Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $a_1 = \mathbb{E}(\xi_1)$ äärellinen. Silloin

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = a_1\right) = 1.$$

Tulosta kutsutaan *vahvaksi suurten lukujen laiksi*. Lisäksi mielivaltaiselle $\epsilon > 0$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - a_1\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Tätä kutsutaan *heikoksi suurten lukujen laiksi*.

9. Keskeinen raja-arvolause

Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ kuten kohdassa 8. Oletetaan lisäksi, että $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\xi_1) < \infty$. Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - na_1}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \phi(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, missä ϕ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio,

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

3 Vahinkojen lukumäärä

Vahinkojen lukumäärä annetulla aikavälillä on luontevaa mallintaa ei-negatiiviseksi kokonaislukuarvoiseksi satunnaismuuttujaksi. Hyödyllistä on myös tarkastella kehitystä ajan suhteen, jolloin mallina on sopivat ehdot täyttävä stokastinen prosessi.

Olkoon $K(t)$ aikavälillä $(0, t]$ sattuneiden vahinkojen lukumäärä tarkasteltavassa *vakuutuskannassa* (tällä tarkoitetaan kiinteää vakuutussopimusten joukkoa). Olkoon lisäksi $K(t, u)$ aikavälillä $(t, u]$ sattuneiden vahinkojen lukumäärä, missä $0 \leq t < u$. Tällöin $K(t, u) = K(u) - K(t)$.

Satunnaismuuttujaa K kutsutaan *lukumäärämuuttujaksi*, jos $\mathbb{P}(K \in \{0, 1, 2, \ldots\}) = 1$. Stokastinen prosessi $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ on *laskuriprosessi*, jos $K(t)$ on satunnaismuuttuja annetulla (t:stä riippumattomalla) todennäköisyyskentällä $(\Omega, S, \mathbb{P})$ ja, $\forall t \geq 0$, seuraavat ehdot on täytetty:

(i) $K(0) = 0$ m.v.

(ii) $K(t)$ on lukumäärämuuttuja

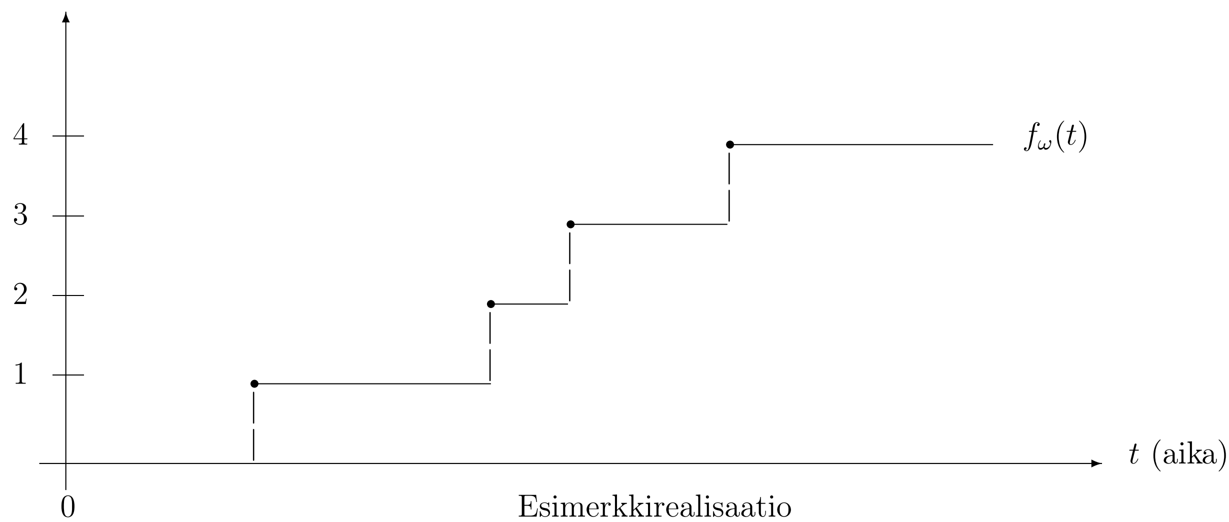
(iii) prosessin realisaatiot ovat oikealta jatkuvia ja niillä on vasemmanpuoleiset raja-arvot ts. kuvaus

$$f_\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_\omega(t) = K(t)(\omega)$$

on oikealta jatkuva ja sillä on vasemmanpuoleiset raja-arvot kaikilla $\omega \in \Omega$ (f_ω on ns. cadlag-funktio)

(iv) $\mathbb{P}(K(t) - K(t-) = 0 \text{ tai } 1, \forall t > 0) = 1$, missä $K(t-) = \lim_{h \to 0+} K(t - h)$.

Vaatimus (iii) on teknisluontoinen. Oleellista on, että $K(t)$ on aina kokonaislukuarvoinen ja että hypyt ovat ykkösen suuruisia (kohdat (ii) ja (iv)). Nämä ominaisuudet ovat luonnollisia mallinnettaessa vahinkojen lukumäärän kehitystä ajassa.



Esimerkkirealisaatio

Mallissa siis vahinkojen sattumishetket ovat satunnaisia. Kunakin hetkenä sattuu korkeintaan yksi vahinko. Viimeksi mainittua ominaisuutta voidaan kritisoida esimerkiksi kahden auton kolarin tapauksessa. Tällöinhän vahinko sattuu yhtäaikaisesti kummallekin osapuolelle. Ongelma voidaan kiertää katsomalla kukin kolari yhdeksi vahingoksi riippumatta osallisten määrästä. Tällä tavalla mallin soveltuvuutta voidaan parantaa.

3.1 Poisson-jakauma ja Poisson-prosessit

Satunnaismuuttuja K on *Poisson-jakautunut parametrilla* $\lambda \geq 0$, jos

$$\mathbb{P}(K = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ \ k = 0, 1, 2, \dots.$$

Jos $\lambda = 0$, sovitaan, että $\mathbb{P}(K = 0) = 1$. Stokastinen prosessi $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ on *Poisson-prosessi intensiteetillä* $\lambda \geq 0$, jos $\{K(t)\}$ on laskuriprosessi ja

a) $K(t, u)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda(u - t)$ kaikilla $0 \leq t < u$

b) mielivaltaisille ajanhetkille $0 \leq t_1 < u_1 \leq t_2 < u_2 \leq \dots \leq t_n < u_n$ lisäykset $K(t_1, u_1), \dots, K(t_n, u_n)$ ovat riippumattomia.

Poisson-prosessi on ehkä yksinkertaisin malli vahinkojen lukumäärän kehitykselle ajassa. Joustavuutta saadaan *epähomogeenisen Poisson-prosessin* avulla. Tämä määritellään seuraavasti. Olkoon $\Lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ kasvava funktio ja $\Lambda(0) = 0$. Prosessi $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi *intensiteettifunktiolla* Λ, jos $\{K(t)\}$ on laskuriprosessi ja

a') $K(t, u)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(u) - \Lambda(t)$ kaikilla $0 \leq t < u$

b') lisäysten riippumattomuusvaatimus b) toteutuu.

Tavallinen Poisson-prosessi saadaan, kun valitaan $\Lambda(t) = \lambda t$ kaikilla $t \geq 0$.

Poisson-prosessien käytölle mallinnuksessa esitetään jatkossa teoreettisia perusteluja. Kootaan aluksi lauseeksi eräitä Poisson-jakauman ominaisuuksia.

Lause 3.1.1. Olkoon K Poisson-jakautunut parametrilla λ. Silloin momentit generoivalle funktiolle M_K, odotusarvolle $\mathbb{E}(K)$, varianssille $\mathrm{Var}(K)$ ja vinoudelle γ_K pätee

$$M_K(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}, \ \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.1.1}$$

$$\mathbb{E}(K) = \mathrm{Var}(K) = \lambda \tag{3.1.2}$$

ja

$$\gamma_K = 1/\sqrt{\lambda}. \tag{3.1.3}$$

Todistus. Momentteja koskevien tulosten todistukset jätetään harjoitustehtäväksi. Määrätään M_K. Olkoon $s \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Silloin

$$\begin{aligned} M_K(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(K = k)e^{sk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{sk} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^s} = e^{\lambda(e^s - 1)}. \square \end{aligned}$$

Poisson-jakauma on binomijakauman rajajakauma seuraavassa mielessä.

Lemma 3.1.1. Olkoon ξ_n:llä $\mathrm{Bin}(n, p_n)$-jakauma ts.

$$\mathbb{P}(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Silloin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

Todistus. Selvästi

$$\mathbb{P}(\xi_n = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda + o(1)}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda + o(1)}{n}\right)^{n-k},$$

missä $o(1) \to 0$, kun $n \to \infty$. Väite seuraa tästä, sillä $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda + o(1)}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$. $\square$.

Tarkastellaan nyt laskuriprosesseja.

Lause 3.1.2. Olkoon $\{K(t)\}$ laskuriprosessi, joka toteuttaa ehdot

(i) *lisäysten riippumattomuus*: mielivaltaisille $0 \le t_1 < u_1 \le t_2 < u_2 \cdots \le t_n < u_n$ lisäykset $K(t_1, u_1), \ldots, K(t_n, u_n)$ ovat riippumattomia

(ii) *lisäysten stationaarisuus*: mielivaltaisille $t, r \ge 0$ $K(r)$ ja $K(t + r) - K(t)$ ovat samoin jakautuneita.

Silloin on olemassa sellainen $\lambda \ge 0$, että $\{K(t) \mid t \ge 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda \ge 0$.

Lauseen 3.1.2 ehdot ovat sopivia ajatellen Poisson-prosessin käyttöä mallinuksessa. Jatkoa ajatellen on mukavampi todistaa seuraava vahvempi tulos.

Lause 3.1.3. Olkoon $\{K(t)\}$ laskuriprosessi, joka toteuttaa lauseen 3.1.2 lisäysten riippumattomuusvaatimuksen (i) sekä ehdon

(ii)' $\mathbb{P}(K(r) = 0) = \mathbb{P}(K(t + r) - K(t) = 0)$ kaikilla $t, r \ge 0$.

Silloin $\{K(t) \mid t \ge 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda = -\log \mathbb{P}(K(1) = 0)$.

Otetaan käyttöön lyhennysmerkintä

$$p_k(t) = \mathbb{P}(K(t) = k), \ \ t \geq 0, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1.4}$$

kun kyseessä olevasta laskuriprosessista $\{K(t)\}$ ei ole epäselvyyttä.

Lauseen 3.1.3 todistus. Olkoot $r, t \geq 0$ mielivaltaisia. Oletusten (i) ja (ii)' nojalla

$$\begin{aligned} p_0(t+r) &= \mathbb{P}(K(t+r) = 0) = \mathbb{P}(K(t) = 0, K(t, t+r) = 0) \\ &= \mathbb{P}(K(t) = 0)\mathbb{P}(K(t, t+r) = 0) = p_0(t)p_0(r). \end{aligned}$$

Olkoot m ja n positiivisia kokonaislukuja. Tällöin

$$p_0\left(\frac{m}{n}\right) = \left[p_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left[p_0\left(n\frac{1}{n}\right)\right]^{m/n} = \left[p_0\left(1\right)\right]^{m/n}.$$

Koska $p_0(t)$ on vähenevä t:n suhteen, on välttämättä

$$p_0\left(t\right) = \left[p_0\left(1\right)\right]^t$$

kaikilla $t \geq 0$. Jos nyt $p_0(1) = 1$, niin $\mathbb{P}(K(t) = 0) = 1$ kaikilla $t \geq 0$. Tällöin $\{K(t)\}$ on Poisson-prosessi (intensiteetti on $\lambda = 0$). Voidaan siis olettaa, että $p_0(1) < 1$. Oletetaan, että olisi $p_0(1) = 0$. Olkoot $0 \leq a < b \leq 1$ mielivaltaisia. Tällöin olisi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K(a, b) \geq 1) &= \mathbb{P}(K(b) - K(a) \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(K(b) - K(a) = 0) \\ &= 1 - p_0(b-a) = 1 - \left[p_0(1)\right]^{b-a} = 1. \end{aligned}$$

Jakamalla väli $[0, 1]$ äärettömän moneksi erilliseksi väliksi nähdään, että olisi

$$\mathbb{P}(K(1) < \infty) = 0.$$

Saatiin ristiriita.

Edellä esitetyn nojalla voidaan olettaa, että $p_0(1) \in (0, 1)$. Merkitään

$$\lambda = -\log(p_0(1)),$$

jolloin $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ kaikilla $t \geq 0$. Olkoon nyt $t > 0$ ja k mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan todennäköisyyttä $p_k(t)$. Olkoon $n > k$ kokonaisluku. Välit

$$I_\nu^n = \left(\frac{\nu - 1}{n}t, \frac{\nu}{n}t\right], \ \ \nu = 1, \ldots, n,$$

muodostavat välin $(0, t]$ osituksen ts. ovat alkiovieraita ja $(0, t] = I_1^n \cup \cdots \cup I_n^n$. Olkoon A_k^n niiden realisaatioiden joukko, joilla on hyppy tarkalleen k välillä I_ν^n ts.

$$A_k^n = \bigcup_{1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_k \leq n} \left[\bigcap_{i=1}^k \left(K\left(\frac{\nu_i - 1}{n}t, \frac{\nu_i}{n}t\right) > 0\right) \bigcap_{\nu \notin \{\nu_1, \ldots, \nu_k\}} \left(K\left(\frac{\nu - 1}{n}t, \frac{\nu}{n}t\right) = 0\right)\right].$$

Olkoon edelleen B^n niiden realisaatioiden joukko, joilla on vähintään kaksi hyppyä jollakin välillä I_ν^n eli

$$B^n = \bigcup_{\nu=1}^{n} \left[K\left(\frac{\nu-1}{n}t, \frac{\nu}{n}t \right) \geq 2 \right].$$

Oletusten (i) ja (ii)' nojalla $\mathbb{P}\left(A_k^n\right)$ on binomitodennäköisyys,

$$\mathbb{P}\left(A_k^n\right) = \mathbb{P}(\xi_n = k),$$

missä ξ_n:llä on Bin$(n, 1 - e^{-\lambda t/n})$-jakauma. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_k^n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{3.1.5}$$

Tarkastellaan nyt joukon B^n todennäköisyyttä, kun $n \to \infty$. Laskuriprosessin realisaatioilla on äärellisellä välillä vain äärellinen määrä hyppyjä ja hypyt ovat ykkösen suuruisia. Koska realisaatiot ovat oikealta jatkuvia, ei tällainen realisaatio ole B^n:ssä, kun n on riittävän suuri. Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(B^n\right) = 0. \tag{3.1.6}$$

Selvästi

$$A_k^n \setminus B^n \subseteq \{K(t) = k\} \subseteq A_k^n \cup B^n,$$

joten

$$\mathbb{P}(A_k^n) - \mathbb{P}(B^n) \leq p_k(t) \leq \mathbb{P}(A_k^n) + \mathbb{P}(B^n).$$

Tulosten (3.1.5) ja (3.1.6) nojalla

$$p_k(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_k^n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Olkoon nyt $0 \leq t < u$. Osoitetaan, että $K(u) - K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda(u-t)$. Tämä todistaa lauseen. Olkoon $s \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Oletuksen (i) nojalla

$$M_{K(u)}(s) = M_{K(t)+K(u)-K(t)}(s) = M_{K(t)}(s)M_{K(u)-K(t)}(s).$$

Lauseen 3.1.1 ja todistuksen alkuosan nojalla

$$M_{K(u)-K(t)}(s) = \frac{M_{K(u)}(s)}{M_{K(t)}(s)} = e^{\lambda u(e^s-1)}e^{-\lambda t(e^s-1)} = e^{\lambda(u-t)(e^s-1)}.$$

Siis $K(u) - K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda(u-t)$. $\square$

Esitetään seuraavaksi vaihtoehtoinen Poisson-prosessin määritelmä ilman todistusta.

Lause 3.1.3.1. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\lambda > 0$. Toisin sanoen

$$\mathbb{P}(\xi \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Määritellään prosessi $\{K(t) | t \geq 0\}$ ehdosta

$$K(t) = \begin{cases} \sup\{k | \, \xi_1 + \cdots + \xi_k \leq t\}, \\ 0, \text{ jos } \xi_1 > t. \end{cases}$$

Silloin $\{K(t) | t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ.

Kääntäen, jos $\{K(t) | t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ ja

$$T_k = \inf\{t | \, K(t) \geq k\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

niin $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ ovat riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\lambda > 0$.

Tarkastellaan lopuksi lauseen 3.1.2 yleistystä heikentämällä stationaarisuusvaatimusta (ii).

Lause 3.1.4. Olkoon $\{K(t)\}$ laskuriprosessi ja

$$p_k(t) = \mathbb{P}(K(t) = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Oletetaan, että $\{K(t)\}$ toteuttaa lauseen 3.1.2 lisäysten riippumattomuusvaatimuksen (i). Oletetaan lisäksi, että $p_0(t) \in (0, 1]$ kaikilla $t \geq 0$ ja että $p_0 : [0, \infty) \to (0, 1]$ on jatkuva. Silloin $\{K(t)\}$ on Poisson-prosessi intensiteettifunktiolla Λ, missä

$$\Lambda(t) = -\log p_0(t) \tag{3.1.7}$$

kaikilla $t \geq 0$.

Todettakoon, että jos p_0:lla on epäjatkuvuuspiste kohdassa t_0, niin hetkellä t_0 sattuu vahinko positiivisella todennäköisyydellä. Tämä ei ole kovin luonnollista vahinkovakuutuksessa.

Lauseen 3.1.4 todistus. Merkitään $p_0(\infty) = \lim_{t \to \infty} p_0(t)$ ja $C = (p_0(\infty), 1]$. Olkoon

$$p_0^{-1}(t) = \sup\{u \geq 0 \mid p_0(u) = t\}$$

kaikilla $t \in C$. Jatkuvuuden nojalla p_0^{-1} on hyvin määritelty. Lisäksi p_0^{-1} on vasemmalta jatkuva ja aidosti vähenevä funktio sekä $p_0(p_0^{-1}(t)) = t$ kaikilla $t \in C$. Okoon $\mu > 0$ kiinteä ja

$$\tau(t) = p_0^{-1}(e^{-\mu t}),$$

kaikilla $t \in C'$, missä

$$C' = \{t \geq 0 \mid e^{-\mu t} \in C\} = [0, -\mu^{-1} \log p_0(\infty)).$$

Tällöin τ on oikealta jatkuva ja aidosti kasvava. Määritellään laskuriprosessi $\{K^*(t) \mid t \in C'\}$ ehdosta $K^*(t) = K(\tau(t))$ kaikilla $t \in C'$. Selvästi $\{K^*(t)\}$ toteuttaa lauseen 3.1.2 riippumattomuusvaatimuksen (i). Osoitetaan, että myös lauseen 3.1.3 vaatimus (ii)' toteutuu. Koska $p_0(\tau(t)) = e^{-\mu t}$, niin

$$\mathbb{P}(K^*(t) = 0) = \mathbb{P}(K(\tau(t)) = 0) = e^{-\mu t}.$$

Toisaalta mielivaltaisille $t, r \geq 0$ pätee

$$\mathbb{P}(K^*(t+r) = 0) = \mathbb{P}(K^*(t) = 0)\,\mathbb{P}(K^*(t+r) - K^*(t) = 0),$$

joten

$$\mathbb{P}(K^*(t+r) - K^*(t) = 0) = \frac{\mathbb{P}(K^*(t+r) = 0)}{\mathbb{P}(K^*(t) = 0)} = e^{-\mu r} = \mathbb{P}(K^*(r) = 0).$$

Tämä on juuri (ii)'. Lauseen 3.1.3 nojalla $\{K^*(t)\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä

$$-\log \mathbb{P}(K^*(1) = 0) = \mu$$

(merkitystä ei ole sillä, että $K^*(t)$ on määritelty vain alueessa $t \in C'$).

Jos nyt t on sellainen, että $\tau(u) = t$ jollain $u \in C'$, niin

$$K(t) = K(\tau(u)) = K^*(u),$$

joten $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla μu. Toisaalta $p_0(t) = e^{-\mu u}$, joten

$$\mu u = -\log p_0(t) = \Lambda(t).$$

Olkoon nyt t sellainen, että $\tau(u) \neq t$ kaikilla $u \in C'$. Olkoon

$$v_t = \inf\{v \geq t \mid \tau(u) = v \text{ jollain } u \in C'\}.$$

Oletetaan ensin, että $v_t < \infty$. Osoitetaan, että $p_0(t) = p_0(v_t)$. Jos $t_1, t_2 \geq 0$ ovat sellaisia, että $p_0(t_1) > p_0(t_2)$, niin voidaan määrätä sellainen $t' \in (t_1, t_2)$, että $p_0^{-1}(p_0(t')) = t'$. Esimerkiksi valitaan

$$u' \in (p_0(t_2), p_0(t_1)) \text{ ja } t' = p_0^{-1}(u').$$

Jos olisi $p_0(t) > p_0(v_t)$, voitaisiin siis määrätä sellainen $t' \in (t, v_t)$, että

$$\tau(-\mu^{-1} \log p_0(t')) = t'.$$

Tämä on vastoin v_t:n minimaalisuusominaisuutta. Siis $p_0(t) = p_0(v_t)$. Selvästi

$$\begin{aligned} p_0(v_t) &= \mathbb{P}(K(v_t) = 0) = \mathbb{P}(K(t) = 0, K(v_t) - K(t) = 0) \\ &= \mathbb{P}(K(t) = 0)\,\mathbb{P}(K(v_t) - K(t) = 0) \\ &= p_0(t)\,\mathbb{P}(K(v_t) - K(t) = 0). \end{aligned}$$

Siis $\mathbb{P}(K(v_t) - K(t) = 0) = 1$. Selvästi $\tau(u_t) = v_t$ eräälle $u_t \in C'$, joten alkuosan nojalla $K(v_t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(v_t)$. Edellä esitetyn nojalla $K(t) = K(v_t)$ melkein varmasti, joten $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\Lambda(v_t) = -\log p_0(v_t) = -\log p_0(t) = \Lambda(t).$$

Olkoon nyt $v_t = \infty$. Ilmeisesti

$$\lim_{u \to -\mu^{-1} \log p_0(\infty)} \tau(u) = \sup\{t \geq 0 \mid p_0(t) \in (p_0(\infty), 1]\}.$$

Nähdään, että välttämättä $p_0(t) = p_0(\infty)$ jostain t:n arvosta lähtien. Olkoon $\underline{t}$ minimaalinen tällainen t. Tällöin p_0^{-1}:n määrittelyjoukko voidaan laajentaa suljetuksi väliksi $[p_0(\infty), 1]$ asettamalla $p_0^{-1}(p_0(\infty)) = \underline{t}$. Määrittelemällä τ alkuperäisellä kaavalla saadaan

$$\tau(-\mu^{-1} \log p_0(\infty)) = \underline{t}.$$

Tällöin $p_0(\tau(t)) = e^{-\mu t}$ aina, kun vasen puoli on määritelty. Alkuosan nojalla $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(t)$ kaikilla $t \leq \underline{t}$. Jos $t > \underline{t}$, niin

$$p_0(t) = p_0(\underline{t}) = p_0(\infty).$$

Nähdään kuten alkuosassa, että $\mathbb{P}(K(t) - K(\underline{t}) = 0) = 1$ ja että $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(\underline{t}) = \Lambda(t)$.

On siis todistettu, että $K(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(t)$ kaikilla $t \geq 0$. Tarkastelemalla generoivia funktioita kuten lauseen 3.1.3 todistuksen lopussa nähdään, että $K(t, u)$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\Lambda(u) - \Lambda(t)$ kaikilla $0 \leq t < u$. □

Arvioitaessa Poisson-prosessin sopivuutta vahinkojen lukumäärien kuvaamiseen on lauseen 3.1.2 nojalla tarkasteltava lisäysten riippumattomuutta ja stationaarisuutta. Lauseen 3.1.4 nojalla stationaarisuusoletuksesta voidaan pitkälle luopua ja silti prosessi pystytään kuvaamaan yksityiskohtaisesti.

Riippumattomuusoletuksen heikentäminen on vaikeampi tehtävä. Voidaan kuitenkin perustellusti väittää, että oletus ei aina ole sovelluksessa täytetty. Esimerkkinä mainittakoon epidemiat. Tällöin suuri sairastuneiden määrä antaa aiheen olettaa, että sairastuvuus on jatkossakin korkea. Myös taloudellinen taantuma aiheuttaa yleensä runsaasti vahinkoja useana peräkkäisenä vuotena esimerkiksi takausvakuutuksessa. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan Poisson-jakauman ja Poisson-prosessin modifikaatioita, jotka sallivat suurempia vaihteluita vahinkojen lukumäärissä ja lisäyksille tietynlaista riippuvuutta.

3.2 Painotettu Poisson-muuttuja

Tarkastellaan vahinkojen lukumäärää kiinteällä ajanjaksolla, esimerkiksi yhden vuoden aikana. Oleellinen piirre seuraavassa tarkasteltavassa mallissa on, että se pystyy kuvaamaan Poisson-oletukseen verrattuna suurempia heilahteluja vahinkojen lukumäärässä.

Olkoon Q ei-negatiivinen satunnaismuuttuja ja $\lambda > 0$ vakio. Oletetaan, että $\mathbb{E}(Q) = 1$. Lukumäärämuuttujaa K kutsutaan *painotetuksi Poisson-muuttujaksi parametrilla* (λ, Q) (engl. mixed Poisson variable), jos

$$F_{K|Q}(k|q) = \mathbb{P}(K \leq k|Q = q) = e^{-\lambda q} \sum_{h=0}^{k} \frac{(\lambda q)^h}{h!}$$

kaikilla $q \geq 0$ ja $k = 0, 1, 2, \ldots$. Muuttujaa Q kutsutaan jakauman *struktuurimuuttujaksi.*

Heuristisesti voidaan ajatella, että vuoden alussa 'arvotaan' struktuurimuuttujan arvo, joka sitten määrää Poisson-parametrin seuraavalle vuodelle. Struktuurimuuttujan vaihteluiden voidaan katsoa selittävän esimerkiksi liukkaiden kelien määrän vuosivaihteluja liikennevakuutuksessa tai hellepäivien määrän vaihteluja metsäpalovakuutuksessa.

Merkitään struktuurimuuttujan kertymäfunktiota symbolilla H ts.

$$H(q) = \mathbb{P}(Q \leq q), \ \ q \in \mathbb{R}.$$

Lukumäärämuuttujan K pistetodennäköisyydet ovat mallissa

$$\mathbb{P}(K = k) = \int_0^\infty \mathbb{P}(K = k|Q = q)dH(q) = \int_0^\infty e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} dH(q), \tag{3.2.1}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Momentit generoivaksi funktioksi saadaan

$$M_K(s) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{e^{sK}|Q\}\} = \mathbb{E}\left(e^{\lambda Q(e^s-1)}\right) = \int_0^\infty e^{\lambda q(e^s-1)} dH(q). \tag{3.2.2}$$

Nähdään, että

$$M_K(s) = M_Q(\lambda(e^s - 1)) = M_Q(c(s)), \tag{3.2.3}$$

missä c on Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan kumulantit generoiva funktio (Poisson-parametri $= \lambda$).

Lause 3.2.1. Olkoon K painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ, Q). Oletetaan, että M_Q on äärellinen eräässä origon ympäristössä. Silloin

$$\mathbb{E}(K) = \lambda,$$

$$\sigma_K^2 = \lambda + \lambda^2 \sigma_Q^2$$

ja

$$\gamma_K = (\lambda + 3\lambda^2\sigma_Q^2 + \lambda^3\gamma_Q\sigma_Q^3)/\sigma_K^3.$$

Lauseen todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Usein on hyödyllistä tarkastella erikseen vahinkojen lukumääriä sopivissa vakuutuskannan osissa. Tällöin herää kysymys, mitä tapahtuu, kun osat yhdistetään. Seuraavassa osoitetaan, että tietyin ehdoin painotettujen Poisson-muuttujien summa on edelleen painotettu Poisson-muuttuja.

Olkoon K_i painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda_i, Q_i), i = 1, 2$. Riippuvuutta osien välillä sallitaan seuraavassa struktuurimuuttujien välityksellä. Tarkemmin, oletetaan että

$$\mathbb{P}(K_1 = k_1, K_2 = k_2 | Q_1, Q_2) = \mathbb{P}(K_1 = k_1 | Q_1)\,\mathbb{P}(K_2 = k_2 | Q_2) \tag{3.2.4}$$

kaikilla $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$. Olkoon $\overline{H}$ muuttujien Q_1 ja Q_2 yhteiskertymäfunktio. Jos B_1 ja B_2 ovat mielivaltaisia Borel-joukkoja, niin

$$\mathbb{P}(K_1 = k_1, K_2 = k_2, Q_1 \in B_1, Q_2 \in B_2) = \int_{B_1 \times B_2} e^{-\lambda_1 q_1} \frac{(\lambda_1 q_1)^{k_1}}{k_1!}\, e^{-\lambda_2 q_2} \frac{(\lambda_2 q_2)^{k_2}}{k_2!}\, d\overline{H}(q_1, q_2).$$

Lause 3.2.2. Olkoon K_i painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ_i, Q_i), $i = 1, 2$, sekä $K = K_1 + K_2$. Oletetaan, että ehto (3.2.4) toteutuu kaikilla $k_1, k_2 = 0, 1, 2, \ldots$. Silloin K on painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda_1 + \lambda_2, Q)$, missä

$$Q = \frac{\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Todistus. Oletuksen (3.2.4) nojalla

$$M_K(s) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{e^{sK} | Q_1, Q_2\}\} = \mathbb{E}\left(e^{\lambda_1 Q_1 (e^s - 1)}\, e^{\lambda_2 Q_2 (e^s - 1)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{(\lambda_1 + \lambda_2) Q (e^s - 1)}\right).$$

Väite seuraa tästä ja (3.2.3):sta. □

Usein struktuurimuuttujasta ei saada suoria havaintoja, joten jakauman estimointi ei ole aivan suoraviivaista. Käytännössä jakauma voitaisiin valita sopivasta parametrisoidusta perheestä. Toisinaan on riittävää tuntea vain alimmat momentit, jolloin estimointitehtävä on helpompi.

Suosittu ehdokas struktuurimuuttujan jakaumaksi on gamma-jakauma, jota tarkastellaan seuraavassa esimerkissä. Lukumäärämuuttujalla tulee tällöin olemaan (yleistetty) *negatiivinen binomijakauma*. Tätä kutsutaan myös *Polya-jakaumaksi.*

Esimerkki 3.2.1. Olkoon struktuurimuuttujalla Q gamma-(r, α)-jakauma, missä α ja r ovat positiivisia vakioita. Tällöin Q:n tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} e^{-\alpha x} x^{r-1}$$

alueessa $x \geq 0$, missä Γ on Eulerin gammafunktio,

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du.$$

Ehdon $\mathbb{E}(Q) = 1$ täyttämiseksi on valittava $\alpha = r$. Tällöin Q:n kertymäfunktio on

$$H(q) = \int_0^q \frac{r^r}{\Gamma(r)} e^{-rx} x^{r-1} dx = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{rq} e^{-x} x^{r-1} dx$$

alueessa $q \geq 0$. Osoitetaan, että

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)} \left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^r \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^k, \tag{3.2.5}$$

kun $k = 0, 1, 2, \ldots$. Jos tässä $r \in \mathbb{N}$ ja merkitään $p = r/(r+\lambda)$, saadaan tavallinen negatiivinen binomijakauma

$$\mathbb{P}(K = k) = \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k.$$

Väite (3.2.5) todistetaan suoraviivaisella laskulla lähtien esityksestä (3.2.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} dH(q) &= \int_0^\infty e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} \frac{r^r}{\Gamma(r)} e^{-rq} q^{r-1} dq \\ &= \frac{r^r \lambda^k}{k! \Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-(r+\lambda)q} q^{r+k-1} dq. \end{aligned}$$

Viimeinen integrandi on vakiokerrointa vaille gamma-$(r+k, r+\lambda)$-jakauman tiheysfunktio. Koska tiheysfunktio integroituu ykköseksi ja $\Gamma(k+1) = k!$, saadaan

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{r^r \lambda^k}{k! \Gamma(r)} \frac{\Gamma(r+k)}{(r+\lambda)^{r+k}} = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)} \left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^r \left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^k.$$

Tämä on juuri (3.2.5).

3.3 Yksittäisen vakuutetun vahinkojen lukumäärä

Sovelluksissa syntyy usein tarve tarkastella yksittäisten vakuutettujen vahinkoprosesseja. Näin on esimerkiksi vakuutusten hinnoittelussa. Painotettu Poisson-muuttuja osoittautuu myös tässä hyödylliseksi.

Tarkastellaan kiinteää vakuutuskantaa. Poisson-prosessi saattaa olla perusteltu malli kunkin vakuutetun vahinkojen lukumäärälle (tai Poisson-jakauma kiinteällä aikavälillä).

Tehdään tämä oletus. Poisson-parametria ei kuitenkaan voi pitää samana kaikilla vakuutetuilla. Esimerkiksi liikennevakuutuksessa eroja syntyy erilaisesta ajokilometrien määrästä ja kuljettajien erilaisesta ajokokemuksesta ja -taidosta.

Mallinnetaan tilanne seuraavasti:

Vakuutettu	1	2	...	N
Poisson-parametri	λq_1	λq_2	...	λq_N.

Tässä λ kuvaa keskimääräistä vahinkojen lukumäärän odotusarvoa vakuutuskannassa. Kertoimet q_i kuvaavat vakuutettujen odotusarvoja suhteessa koko kannan odotusarvoon. Oletetaan λ valituksi siten, että q-kertoimien keskiarvo on yksi eli $(q_1 + \cdots + q_N)/N = 1$.

Olkoon L umpimähkään kannasta valittu vakuutettu ja K tällaisen vahinkojen lukumäärä. Toisin sanoen $L = i$ todennäköisyydellä $1/N$, $i = 1, \ldots, N$. Valitun vakuutetun vahinkojen lukumäärän jakauma on kokonaistodennäköisyysteoreeman nojalla

$$\mathbb{P}(K = k) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(L = i)\,\mathbb{P}(K = k|L = i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\, e^{-\lambda q_i} \frac{(\lambda q_i)^k}{k!}.$$

Määritellään satunnaismuuttuja Q (tai sen jakauma) ehdosta

$$H(q) := \mathbb{P}(Q \leq q) = \frac{\#\{i|q_i \leq q\}}{N}$$

kaikilla $q \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbb{P}(K = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^k}{k!} dH(q),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$. Kyseessä on siis painotettu Poisson-muuttuja. Struktuurimuuttuja Q kuvaa tässä kannan heterogeenisuutta.

Edellä on ajateltu, että todelliset q-kertoimet ovat tiedossa ja Q:n jakauma kuvaa näiden suhteellisia osuuksia kannassa. Yleensä kertoimet eivät ole tarkasti tiedossa, mutta Poisson-parametrin jakaumasta on kuitenkin jonkinlainen käsitys. Tällöin Q voisi olla sopiva approksimaatio tästä jakaumasta.

3.4 Painotettu Poisson-prosessi

Edellä esitetty painotettu Poisson-jakauma on hyödyllinen myös tarkasteltaessa vahinkojen sattumista jatkuva-aikaisesti. Erityisesti voidaan laatia malleja, joissa lukumäärien lisäykset eivät ole riippumattomia.

Otetaan lähtökohdaksi Poisson-prosessi, mutta sallitaan intensiteetin olla stokastinen. Olkoot vuotuiset struktuurimuuttujat $Q_1, Q_2, \ldots$. Oletetaan, että nämä ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita. Olkoon keskimääräinen Poisson-parametri λ ja struktuurimuuttujien yhteinen kertymäfunktio H kuten aiemminkin. Olkoon edelleen Q samoin jakautunut kuin Q_1 ja N positiivinen kokonaisluku. Rajoitetaan määritelmä koskemaan vain äärellistä aikajännettä $[0, N]$.

Edellä esitetyin merkinnöin ja oletuksin laskuriprosessi $\{K(t) \mid t \in [0, N]\}$ on *painotettu Poisson-prosessi parametrina* (λ, Q), jos ehdolla $Q_1 = q_1, \ldots, Q_N = q_N$, prosessi $\{K(t) \mid t \in [0, N]\}$ on Poisson-prosessi intensiteettifunktiolla

$$\Lambda(t) = \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor} \lambda q_n + (t - \lfloor t \rfloor)\lambda q_{\lfloor t \rfloor + 1}, \ \ t \in [0, N], \tag{3.4.1}$$

missä $\lfloor t \rfloor$ tarkoittaa t:n kokonaisosaa.

Ehdollinen intensiteetti Λ kasvaa mallissa (3.4.1) lineaarisesti vuosien sisällä. Kasvunopeuden sallitaan vaihdella vuosittain. Tarkastelemalla mutkikkaampia intensiteettifunktioita päästäisiin huomattavasti laajempaan laskuriprosessiluokkaan. Kurssilla rajoitutaan kuitenkin kaavan (3.4.1) mukaisiin malleihin.

Prosessin äärellisulotteisia jakaumia havainnollistaa seuraava esimerkki. Olkoot $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ ei-negatiivisia kokonaislukuja ja $t_1, t_2 \in (0, 1)$ ja $t_3 \in (1, 2)$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(K(t_1) = k_1, K(t_2) = k_2, K(t_3) = k_3) \\
&= \mathbb{P}(K(t_1) = k_1, K(t_2) - K(t_1) = k_2 - k_1, K(t_3) - K(t_2) = k_3 - k_2) \\
&= \int_{q_1=0}^{\infty} \int_{q_2=0}^{\infty} e^{-\lambda q_1 t_1} \frac{(\lambda q_1 t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda q_1 (t_2 - t_1)} \frac{(\lambda q_1 (t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} \\
&\cdot e^{-\lambda(q_1(1-t_2) + q_2(t_3 - 1))} \frac{(\lambda(q_1(1-t_2) + q_2(t_3-1))^{k_3 - k_2}}{(k_3 - k_2)!} dH(q_1) dH(q_2).
\end{aligned}$$

Äärellisulotteiset jakaumat puolestaan määräävät koko prosessin (ainakin, jos rajoitutaan minimaaliseen kyseeseen tulevaan sigma-algebraan prosessin määrittelyssä).

On helppo nähdä, että prosessin lisäykset eri vuosina ovat riippumattomia (esimerkiksi $K(1) - K(1/2)$ ja $K(5/3) - K(4/3)$ ovat riippumattomia). Riippuvuutta sen sijaan on vuosien sisällä. Osoitetaan, että painotetun Poisson-prosessin $\{K(t)\}$ lisäykset ovat riippumattomia lauseen 3.1.2 kohdan (i) mielessä vain, jos $\{K(t)\}$ on homogeeninen Poisson-prosessi.

Olkoon $0 \leq t < u \leq 1$. Ilmeisesti $K(u) - K(t)$ on painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda(u - t), Q)$. Lauseen 3.2.1 nojalla

$$\mathrm{Var}(K(u) - K(t)) = \lambda(u - t) + \lambda^2 (u - t)^2 \mathrm{Var}(Q).$$

Erityisesti

$$\mathrm{Var}(K(1)) = \lambda + \lambda^2 \mathrm{Var}(Q),$$

$$\mathrm{Var}\left(K(1/2)\right) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2 \mathrm{Var}(Q)$$

ja

$$\mathrm{Var}(K(1) - K(1/2)) = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2 \mathrm{Var}(Q).$$

Jos lisäykset ovat riippumattomia, pätee

$$\mathrm{Var}(K(1)) = \mathrm{Var}(K(1/2)) + \mathrm{Var}(K(1) - K(1/2)).$$

Näin on vain, jos $\mathrm{Var}(Q) = 0$. Tällöin $\mathbb{P}(Q = 1) = 1$ ja siis $\{K(t)\}$ on Poisson-prosessi.

4 Kokonaisvahinkomuuttuja

Vahingon sattuessa vakuutusyhtiö suorittaa korvauksen esimerkiksi tulipalon tai kolarin aiheuttamista taloudellisista menetyksistä. Yksittäisen korvauksen määrä on luontevaa mallintaa ei-negatiivisia arvoja saavaksi satunnaismuuttujaksi. Tarkastellaan seuraavassa näiden yhteismäärää vuodessa, ns. *kokonaisvahinkomäärää* (vuodessa).

Merkitään i. vahingon suuruutta symbolilla Z_i. Jos vahinkojen lukumäärä tarkasteluvuotena on K, on kokonaisvahinkomäärä

$$X = Z_1 + \cdots + Z_K. \tag{4.1}$$

Siis sekä vahinkojen lukumäärä että niiden suuruudet ovat satunnaismuuttujia. Kutsutaan X:ää myös *kokonaisvahinkomuuttujaksi*. Z-muuttujia kutsutaan (yksittäisten) *vahinkojen suuruuksiksi*. Kokonaisvahinkomuuttujan selvittäminen ja arvioiminen on eräs riskiteorian keskeisistä tehtävistä.

Olkoon S kertymäfunktio. Kaavan (4.1) mukaista muuttujaa kutsutaan *yhdistetyksi muuttujaksi parametrilla* (K, S), jos

$$K, Z_1, Z_2, \ldots \text{ ovat riippumattomia} \tag{4.2}$$

ja

$$\text{muuttujien } Z_1, Z_2, \ldots \text{ kertymäfunktio on } S. \tag{4.3}$$

Sovelluksessa vaatimukset (4.2) ja (4.3) ovat yleensä vain likimain täytetyt. Esimerkiksi inflaatio saattaa muuttaa yksittäisen vahingon suuruusjakaumaa. Oletetaan tässä luvussa kuitenkin aina, että X on yhdistetty muuttuja. Lisäksi oletetaan, että $\mathbb{P}(K > 0) > 0$.

Olkoon Z geneerinen S-jakautunut satunnaismuuttuja. Siis

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z_i \leq z) = S(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}$ ja $i = 1, 2, \ldots$. Oletetaan jatkossa, että $S(0-) = \mathbb{P}(Z < 0) = 0$. Negatiivisia vahinkojen suuruuksia ei siis sallita. Tällöin myös X on aina ei-negatiivinen. Merkitään vielä $p_k = \mathbb{P}(K = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Olkoon X yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S). Jos K on Poisson-jakautunut parametrilla λ, niin X:ää kutsutaan *yhdistetyksi Poisson-muuttujaksi parametrilla* (λ, S). Vastaavasti jos K noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q), niin X:ää kutsutaan *yhdistetyksi painotetuksi Poisson-muuttujaksi parametrilla* (λ, Q, S).

Kokonaisvahinkomuuttujan X analysointi onnistuu yleensä parhaiten tutkimalla erikseen vahinkojen lukumäärää ja yksittäisten vahinkojen suuruuksia. Tämän perustelemiseksi tarkastellaan X:n kertymäfunktion arvioimista historiatietojen valossa. Luonnollinen vaatimus tällöin on, että havaitut kokonaisvahinkomäärät ovat kaikki peräisin samasta jakaumasta. Käyttökelpoisia havaintoja X:stä on yleensä niukasti, koska ympäristö muuttuu ajan kuluessa. Vahinkojen suuruuksista on sen sijaan usein paljon havaintoja. Vahinkojen lukumäärän osalta estimointi taas on muuten yksinkertaisempaa. Esimerkiksi Poisson-jakauma määräytyy yhdestä parametrista. Yhteenvetona voidaan todeta, että perusteltu *malli* on suureksi hyödyksi estimointitehtävässä.

Olkoon X:n kertymäfunktio F. Yhdistetyn muuttujan ominaisuuksien perusteella

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k S^{k*}(x), \tag{4.4}$$

missä S^{k*} on S:n k. *konvoluutio*

$$S^{0*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0 \\ 1, & \text{jos } x \geq 0, \end{cases}$$

$$S^{k*}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S^{(k-1)*}(x-y)dS(y), \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Periaatteessa F pystytään määräämään näistä yhtälöistä, kunhan pistetodennäköisyydet p_k ja kertymäfunktio S tunnetaan. Teknisesti tämä on työlästä varsinkin, jos vahinkojen lukumäärän odotusarvo on suuri. Todetaan vielä, että

$$\mathbb{P}(X \leq x, K = k) = S^{k*}(x)p_k,$$

joten

$$F_{X|K}(x|k) = S^{k*}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Momentit generoivassa funktiossa vahinkojen lukumäärä ja vahinkojen suuruudet ovat selkeästi eristettyjä.

Lause 4.1. Olkoon X yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S) ja Z S-jakautunut satunnaismuuttuja. Olkoon edelleen M_K muuttujan K momentit generoiva funktio ja c_Z muuttujan Z kumulantit generoiva funktio. Silloin X:n momentit generoiva funktio M_X määräytyy ehdosta

$$M_X(s) = M_K(c_Z(s)), \;\; s \in \mathbb{R},$$

missä sovitaan, että $M_X(s) = \infty$, jos $c_Z(s) = \infty$.

Todistus. Oletusten (4.2) ja (4.3) nojalla

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{sX}\mathbb{1}(K = k)) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{E}(e^{s(Z_1+\cdots+Z_k)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k M_Z(s)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{kc_Z(s)} = M_K(c_Z(s)). \;\square \end{aligned}$$

Jos erityisesti X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S), niin

$$M_X(s) = e^{\lambda(M_Z(s)-1)} \tag{4.5}$$

ja jos X on yhdistetty painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ, Q, S), niin

$$M_X(s) = M_Q(\lambda(M_Z(s) - 1)). \tag{4.6}$$

Yhdistetyn muuttujan alimmat momentit voidaan selvittää yleensä momentit generoivan funktion avulla. Olkoon a_i Z:n i. origomomentti,

$$a_i = \mathbb{E}(Z^i) = \int_0^\infty z^i dS(z). \tag{4.7}$$

Lause 4.2. Olkoon X yhdistetty painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ, Q, S). Silloin X:n odotusarvo, varianssi ja vinous ovet

$$\begin{aligned} \mu_X &= \mathbb{E}(X) = \lambda a_1 \\ \sigma_X^2 &= \mathrm{Var}(X) = \lambda a_2 + \lambda^2 a_1^2 \sigma_Q^2 \end{aligned}$$

ja

$$\gamma_X = [\lambda a_3 + 3\lambda^2 a_1 a_2 \sigma_Q^2 + \lambda^3 a_1^3 \gamma_Q \sigma_Q^3]/\sigma_X^3$$

edellyttäen, että oikealla puolella esiintyvät momentit ovat äärellisinä olemassa.

Lauseen todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Jos erityisesti X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S), niin

$$\mu_X = \lambda a_1, \tag{4.8}$$

$$\sigma_X^2 = \lambda a_2, \tag{4.9}$$

$$\mu_3 = \mathbb{E}((X - \mu_X)^3) = \lambda a_3 \tag{4.10}$$

ja

$$\gamma_X = \mu_3/\sigma_X^3 = \frac{a_3}{a_2^{3/2}\sqrt{\lambda}}. \tag{4.11}$$

Todistetaan lopuksi yhdistetyn Poisson-jakauman additiivisuusominaisuus. Valitsemalla $Z \equiv 1$ seuraavassa lauseessa nähdään, että kahden riippumattoman Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan summa on myös Poisson-jakautunut.

Lause 4.3. Olkoon X_i:llä yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla (λ_i, S_i), $i = 1, 2$. Oletetaan, että X_1 ja X_2 ovat riippumattomia. Silloin muuttujalla $X = X_1 + X_2$ on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla $(\lambda_1 + \lambda_2, S)$, missä

$$S(z) = \frac{\lambda_1 S_1(z) + \lambda_2 S_2(z)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Todistus. Merkitään symbolilla M_i muuttujaan X_i liittyvää yksittäisen vahingon suuruuden momentit generoivaa funktiota, $i = 1, 2$. Siis

$$M_i(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sz} dS_i(z), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Riippumattomuuden ja lauseen 4.1 nojalla

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \mathbb{E}(e^{sX}) = \mathbb{E}(e^{sX_1})\,\mathbb{E}(e^{sX_2}) \\ &= e^{\lambda_1(M_1(s)-1)}\,e^{\lambda_2(M_2(s)-1)}. \end{aligned}$$

Siis

$$M_X(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}M_1(s)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}M_2(s)-1)}. \tag{4.13}$$

Suoraviivaisesti nähdään, että kertymäfunktioon (4.12) liittyvä momentit generoiva funktio on

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}M_1(s) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}M_2(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Väite seuraa (4.13):sta ja lauseesta 4.1. □

Myös kokonaisvahinkomäärää on tarpeen tarkastella jatkuva-aikaisesti. Olkoon $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ laskuriprosessi ja $Z_1, Z_2, \ldots$ yksittäisten vahinkojen suuruuksia kuvaavia satunnaismuuttujia kuten aiemminkin. Oletetaan, että $Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja että ne ovat riippumattomia laskuriprosessista $\{K(t)\}$. Määritellään *kokonaisvahinkoprosessi* $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ ehdosta

$$X(t) = Z_1 + \cdots + Z_{K(t)}. \tag{4.14}$$

Jos $\{K(t)\}$ on Poisson-prosessi intensiteetillä λ ja yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio on S, niin $\{X(t)\}$:tä kutsutaan *yhdistetyksi Poisson-prosessiksi parametrilla* (λ, S). Selvää on, että yhdistetyn Poisson-prosessin lisäykset ovat riippumattomia ja stationaarisia (kyseessä on ns. Levy-prosessi). Vastaavasti jos $\{K(t)\}$ on painotettu Poisson-prosessi parametrilla (λ, Q), niin $\{X(t)\}$:tä kutsutaan *yhdistetyksi painotetuksi Poisson-prosessiksi parametrilla* (λ, Q, S).

5 Yksittäisen vahingon suuruusjakauman arvioimisesta

Tarkastellaan yksittäisen vahingon suuruusjakaumaan liittyviä arviointimenetelmiä ja tähän liittyviä ongelmia. Lähtökohdaksi otetaan tilastoaineisto, joka sisältää havaitut vahinkojen suuruudet esimerkiksi yhdestä vakuutuslajista (palovakuutus, liikennevakuutus jne). Inflaatio ja muut vastaavat trendit ajatellaan eliminoiduksi aineistosta. Lähdetään liikkeelle oletuksesta, että näin muodostettu aineisto koostuu riippumattomista havainnoista $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \ldots$ ja että näiden yhteinen kertymäfunktio on S. Tehtävänä on estimoida S. Olkoon Z geneerinen satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on S.

5.1 Taulukointimenetelmä

Suuren tilastoaineiston tapauksessa voidaan toisinaan tyytyä *empiiriseen jakaumaan* S:n estimaattina. Merkitään tätä vastaavaa kertymäfunktiota symbolilla S^e. Olkoon N havaintojen $\underline{Z}_i$ lukumäärä. Tällöin määritelmän mukaan

$$S^e(z) = \#\{i \leq N \mid \underline{Z}_i \leq z\}/N \tag{5.1}$$

kaikilla $z \geq 0$.

Usein suuria havaintoja on vähän, mistä johtuen oikeaa häntää koskevat estimaatit jäävät menettelyssä epävarmoiksi.

5.2 Analyyttiset menetelmät

Usein on mukavampaa käsitellä analyyttisia jakaumia taulukoidun empiirisen jakauman S^e sijaan (vaikka tilastoaineistoa voitaisiinkin pitää riittävänä empiirisen jakauman käytölle). Tällöin pyritään sovittamaan S^e johonkin matemaattisessa muodossa annettuun jakaumaan. Tilastoaineiston pienuus antaa lisämotivaatiota menettelylle.

Suosittuja analyyttisia jakaumia approksimoimaan yksittäisen vahingon suuruutta ovat:

- Gamma-jakauma parametreilla r, α, missä $r > 0, \alpha > 0$
Tiheysfunktio on

$$s(z) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} e^{-\alpha z} z^{r-1}$$

alueessa $z \geq 0$, missä

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-u} u^{r-1} du.$$

- Log-normaalijakauma parametreilla μ, σ, missä $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Tiheysfunktio on
$$s(z) = \frac{1}{\sigma z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log z - \mu)^2}$$
alueessa $z \geq 0$. On helppo nähdä, että jos Y on $N(\mu, \sigma^2)$-jakautunut (normaalijakauma, odotusarvo $= \mu$, varianssi $= \sigma^2$), niin $Z = e^Y$ on lognormaalisti jakautunut parametreilla μ ja σ.

- Pareto-jakauma parametreilla α, r, missä $\alpha > 0, r > 0$
Tiheysfunktio on
$$s(z) = \frac{\alpha}{r^{-\alpha}} z^{-\alpha-1}$$
alueessa $z > r$. Kertymäfunktio on
$$S(z) = 1 - \left(\frac{z}{r}\right)^{-\alpha}$$
alueessa $z \geq r$.

Jakaumien parametrit määrätään yleensä jollain tilastollisella menetelmällä nojautuen havaintoaineistoon (esimerkiksi suurimman uskottavuuden menetelmällä tai momenttimenetelmällä).

Todettakoon, että edellä esitetyt esimerkit edustavat oikean hännän osalta kolmea eri tyyppiä. Gamma-jakauma on *kevythäntäinen*, mikä määritelmän mukaan tarkoittaa sitä, että momentit generoiva funktio M_Z on äärellinen jollain positiivisella argumentin arvolla. Lognormaalijakauman kaikki momentit ovat äärellisiä, mutta se ei ole kevythäntäinen (vaan *paksuhäntäinen*). Pareto-jakauma on myös paksuhäntäinen. Jakauman origomomentti a_n on äärellinen vain, jos $n < \alpha$. Sovelluksen näkökulmasta Pareto-jakauma on vaarallisin ja gamma-jakauma vähiten vaarallinen mainituista kolmesta esimerkistä.

Pareto-jakaumien tyyppisiä potenssihäntiä voidaan tuottaa seuraavasti. Määritelmän mukaan kuvaus $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on *säännöllisesti vaiheteleva indeksillä* $\alpha \in \mathbb{R}$, jos kaikilla $z > 0$,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tz)}{f(t)} = z^\alpha.$$
Jos edellä $\alpha = 0$, niin f on *hitaasti vaihteleva*. Ilmeisesti f on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α, jos ja vain jos
$$f(z) = z^\alpha f_0(z), \quad z > 0,$$
missä f_0 on hitaasti vaihteleva.

Lause 5.1. Kuvaus $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on hitaasti vaihteleva jos ja vain jos eräälle $b > 0$,
$$f(z) = a(z) \exp\left(\int_b^z \frac{e(y)}{y}\, dy\right)$$

kaikilla $z \geq b$, missä $e(z) \to 0$ ja $a(z) \to c$, kun $z \to \infty$ ja c on positiivinen vakio.

Todistus on esitetty esimerkiksi lähteessä Bingham et al. (1987). Seuraava tulos on lauseen välitön seuraus.

Seuraus 5.1. Jos $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ on hitaasti vaihteleva, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $z_\epsilon > 0$, että

$$z^{-\epsilon} \leq f(z) \leq z^{\epsilon}, \quad \forall z \geq z_\epsilon.$$

Merkitään lyhyesti $\bar{S}(z) = 1 - S(z)$, $z \in \mathbb{R}$. Olkoon $\alpha \geq 0$. Sanotaan, että Z:lla on säännöllisesti vaihteleva (oikea) häntä indeksillä $-\alpha$, jos $\bar{S}$ rajoitettuna välille $(0,\infty)$ on säännöllisesti vaihteleva funktio indeksillä $-\alpha$. Seurauksen 5.1 nojalla tällöin $\bar{S}(z)$ muistuttaa potenssia $z^{-\alpha}$, kun z on suuri. Näin syntyvä jakaumaperhe on suhteellisen laaja ja teoreettisesti paljon tutkittu.

Vaarallisuutta laadullisella tasolla voidaan kuvata häntään liittyvillä tunnusluvuilla seuraavasti. Olkoon $\alpha_S \in [0,\infty]$ sellainen, että

$$\bar{S}(z) \approx e^{-\alpha_S z},$$

kun z on suuri. Täsmällinen määritelmä on

$$\limsup_{z\to\infty} z^{-1} \log \bar{S}(z) = -\alpha_S.$$

Siis α_S kuvaa häntätodennäköisyyksien (eksponentiaalista) häviämisvauhtia z:n kasvaessa. Selvästi $\alpha_S = 0$ esimerkiksi kaikilla Pareto-jakaumilla. Hyödyllisempi tunnusluku tällaisissa tilanteissa onkin (polynomiaalinen) häviämisvauhti $\beta_S \in [0,\infty]$,

$$\bar{S}(z) \approx z^{-\beta_S},$$

kun z on suuri. Tarkemmin, määritellään

$$\limsup_{z\to\infty} (\log z)^{-1} \log \bar{S}(z) = -\beta_S.$$

Lemma 5.1. Olkoon Z:n kertymäfunktio S ja $Z^+ = \max(Z,0)$. Silloin

$$\alpha_S = \sup\left\{s \geq 0; \mathbb{E}\left(e^{sZ}\right) < \infty\right\} \tag{5.2}$$

ja

$$\beta_S = \sup\left\{s \geq 0; \mathbb{E}\left((Z^+)^s\right) < \infty\right\}. \tag{5.3}$$

Todistus. Merkitään

$$\kappa = \sup\left\{s \geq 0; \mathbb{E}\left(e^{sZ}\right) < \infty\right\}.$$

On osoitettava, että $\alpha_S = \kappa$.

Todistetaan ensin, että $\alpha_S \geq \kappa$. Voidaan olettaa, että $\kappa > 0$. Olkoon $s \in (0, \kappa)$, jolloin siis $\mathbb{E}(e^{sZ}) < \infty$. Tsebysevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}\left(e^{sZ}\right) \geq \mathbb{E}\left(e^{sZ}\mathbb{1}(Z > z)\right) \geq e^{sz}\bar{S}(z).$$

Siis

$$-\alpha_S = \limsup_{z\to\infty} z^{-1}\log \bar{S}(z) \leq -s,$$

joten $\alpha_S \geq s$. Siispä $\alpha_S \geq \kappa$. Epäyhtälön kääntämiseksi oletetaan, että $\kappa < \infty$ (muuten asia on selvä). Olkoot $s > \kappa$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltaisia. Tällöin

$$+\infty = \mathbb{E}\left(e^{sZ}\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(e^{sZ} > z\right) dz.$$

On siis olemassa sellainen jono (z_n), että $z_n \to \infty$ ja

$$\mathbb{P}\left(e^{sZ} > z_n\right) \geq z_n^{-1-\epsilon}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Olkoon $y_n = s^{-1}\log z_n$. Nähdään, että

$$-\alpha_S \geq \limsup_{n\to\infty} y_n^{-1}\log \bar{S}(y_n) \geq -(1+\epsilon)s,$$

joten $\alpha_S \leq (1+\epsilon)s$ ja edelleen $\alpha_S \leq \kappa$. Lemman ensimmäinen väite on todistettu. Toinen tulos seuraa tästä. $\square$

Sopivia jakaumaperheitä vahinkojen suuruuksien estimoimiseen on tietysti muitakin kuin edellä esitetyt, kts. DPP, kohta 3.3.

5.3 Jakauman hännän arvioinnista

Suurten vahinkojen esiintymistiheys on tyypillisesti pieni, jolloin empiirinen jakauma jää 'harvaksi' oikean hännän osalta. Suurvahingoilla on toisaalta oleellinen vaikutus vakuutusyhtiön talouteen.

Häntään liittyvää ongelmaa voidaan lähestyä esimerkiksi seuraavin tavoin.

- käytetään laajennettua tilastoaineistoa suurvahingoille (esimerkiksi kerätään suurvahinkoja pitkältä aikaväliltä)
- arvioidaan riskejä yksilöllisesti (vakuutuskannasta voidaan arvioida suurin mahdollinen yksittäinen vahinko jne.)
- lisätään aineistoon haamuvahinkoja (arvioidaan esimerkiksi, millainen vahinko voisi sattua kerran 10 tai 100 vuodessa).

Mikäli jakauman häntä arvioidaan erikseen, syntyy tarve yhdistää jakauman alkupää ja häntä yhdeksi jakaumaksi. Olkoon $M > 0$ ja S_1 jakauman alkupäätä ja S_2 loppupäätä kuvaava kertymäfunktio. Oletetaan, että $S_1(M) = 1$ ja $S_2(M) = 0$. Tulkitaan S_1 yksittäisen vahingon suuruuden ehdolliseksi kertymäfunktioksi ehdolla $Z \leq M$. Vastaavasti S_2 tulkitaan ehdolliseksi kertymäfunktioksi ehdolla $Z > M$. Yhdistetään nämä yhdeksi kertymäfunktioksi $\underline{S}$ asettamalla

$$\underline{S}(z) = p_M S_1(z) + (1 - p_M) S_2(z)$$

kaikilla $z \geq 0$. Parametri p_M edustaa todennäköisyyttä $S(M) = \mathbb{P}(Z \leq M)$ ja se on siis myös estimoitava.

Olkoon $\underline{Z}$ satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on $\underline{S}$ ja $B \subseteq (-\infty, M]$ Borel-joukko. Silloin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\underline{Z} \in B \mid \underline{Z} \leq M) &= \int_B d\underline{S}(z)/\underline{S}(M) \\ &= \frac{\int_B p_M dS_1(z)}{p_M S_1(M)} = \int_B dS_1(z).\end{aligned}$$

Vastaavasti jos $B \subseteq (M, \infty)$ on Borel-joukko, niin

$$\mathbb{P}(\underline{Z} \in B \mid \underline{Z} > M) = \int_B dS_2(z).$$

Tällä tavalla $\underline{S}$ vastaa kertymäfunktiota S_1 alueessa $z \leq M$ ja kertymäfunktiota S_2 alueessa $z > M$.

Oletetaan esimerkkinä, että S_2 valitaan Pareto-jakaumaksi parametreilla α ja r. Tällöin luonnollinen valinta on $M = r$. Parametrin α estimointi voi perustua osaksi aineistoon ja osaksi arvioihin. Kertymäfunktioksi S_1 voitaisiin valita esimerkiksi kaavaa (5.1) vastaava empiirinen ehdollinen jakauma (ehdolla $Z \leq M$). Jos valitaan $p_M = S^e(M)$, niin $\underline{S}(z) = S^e(z)$ alueessa $z \leq M$.

6 Kokonaisvahinkomäärän jakauman laskeminen ja arviointi

Yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion laskeminen on ongelmallista, vaikka vahinkojen lukumäärän ja yksittäisen vahingon suuruuden jakaumat olisivatkin tiedossa. Periaatteessa tämä on mahdollista konvoluutiosumman (4.4) avulla tai muuntamalla lauseen 4.1 momentit generoiva funktio jakaumaksi (tai karakteristinen funktio, joka on esitettävissä lukumäärämuuttujan ja yksittäisen vahingon suuruuden karakterististen funktioiden avulla). Tekninen laskenta saattaa kuitenkin osoittautua työlääksi.

Tarkastellaan seuraavassa kolmea muuta lähestymistapaa, nimittäin rekursiivista algoritmia, approksimaatiomenetelmiä ja simulointia. Lisäksi esitetään eräitä yläraja-arvioita yhdistetyn muuttujan kertymäfunktiolle. Tarkastelut rajoitetaan pääosiltaan koskemaan vain yhdistettyä ja yhdistettyä painotettua Poisson-muuttujaa.

6.1 Panjerin menetelmä

Johdetaan aluksi rekursiivinen laskenta-algoritmi yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion määräämiseksi. Menetelmässä oletetaan, että vahingon suuruus keskittyy äärelliseen pistejoukkoon. Tätä oletusta voitaisiin tosin lieventää. Lukumäärämuuttuja voi olla esimerkiksi Poisson- tai Polya-jakautunut.

Olkoon X yhdistetty muuttuja, johon liittyvä lukumäärämuuttuja on K ja olkoot yksittäisten vahinkojen suuruudet $Z, Z_1, Z_2, \ldots$. Merkitään $p_k = \mathbb{P}(K = k)$. Algoritmissa oletetaan, että nämä toteuttavat rekursion

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \;\; k = 1, 2, \ldots, \tag{6.1}$$

missä a, b ja p_0 ovat vakioita. Luonnollisesti oletetaan, että $p_0 > 0$. On helppo nähdä, että Poisson-, binomi- ja Polya-jakaumat toteuttavat rekursion (6.1). Hieman työläämpää on nähdä, että muita rekursion täyttäviä jakaumia ei ole.

Yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio olkoon S. Oletetaan että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku r ja sellaiset ei-negatiiviset reaaliluvut $s_0, s_1, \ldots, s_r$ sekä vakio $c > 0$, että

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{r} s_i = 1 \\ s_i = \mathbb{P}(Z = ic), \; i = 0, 1, \ldots, r. \end{cases}$$

Muunnoksella $S(z) \to S(cz)$ päästään tilanteeseen, jossa $c = 1$. Tätä vastaavan yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion G ja alkuperäisen muuttujan kertymäfunktion F välillä vallitsee yhteys $G(z) = F(cz)$. Tästä syystä oletetaan seuraavassa yleisyyttä rajoittamatta, että $c = 1$. Tällöin X saa ainoastaan ei-negatiivisia kokonaislukuarvoja. Merkitään

$$f_j = \mathbb{P}(X = j), \; j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.3}$$

Lause 6.1.1. (Panjerin menetelmä). Edellä esitettyjen oletusten ollessa täytetyt todennäköisyydet f_j saadaan rekursiivisesti yhtälöistä

$$\begin{aligned} f_0 &= \begin{cases} p_0, \text{ jos } s_0 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i s_0^i, \text{ jos } s_0 > 0, \end{cases} \\ f_j &= \frac{1}{1 - a s_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{ib}{j} \right) s_i f_{j-i}, \; j = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Todistus. Selvästi $f_0 = \mathbb{P}(X = 0)$. Olkoon $s_0^{0*} = 1, s_j^{0*} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, ja

$$s_j^{k*} = \mathbb{P}(Z_1 + \cdots + Z_k = j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Olkoon $k \geq 1$. Z-muuttujien riippumattomuudesta seuraa, että

$$s_j^{k*} = \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(Z_1 = i, Z_2 + \cdots + Z_k = j - i) = \sum_{i=0}^{j} s_i s_{j-i}^{(k-1)*}. \tag{6.4}$$

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa $s_j^{k*} > 0$. Symmetrian nojalla

$$\mathbb{E}\left(Z_1 \mid \sum_{i=1}^{k} Z_i = j \right) = \frac{1}{k} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i \mid \sum_{i=1}^{k} Z_i = j \right) = \frac{j}{k}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z_1 \mid \sum_{i=1}^{k} Z_i = j \right) &= \sum_{m=1}^{j} m \, \mathbb{P}\left(Z_1 = m \mid \sum_{i=1}^{k} Z_i = j \right) \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{j} m \, \mathbb{P}\left(Z_1 = m, \sum_{i=2}^{k} Z_i = j - m \right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i = j \right)} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{j} m s_m s_{j-m}^{(k-1)*}}{s_j^{k*}}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

$$s_j^{k*} = \frac{k}{j} \sum_{i=1}^{j} i s_i s_{j-i}^{(k-1)*}. \tag{6.5}$$

Tulos pätee myös, kun $s_j^{k*} = 0$, sillä tällöin oikealla puolella kaikki summan termit ovat nollia.

Olkoon nyt $j > 0$. Silloin

$$
\begin{aligned}
f_j &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k s_j^{k*} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} s_j^{k*} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a p_{k-1} \sum_{i=0}^{j} s_i s_{j-i}^{(k-1)*} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{j} p_{k-1} \sum_{i=1}^{j} i s_i s_{j-i}^{(k-1)*} \\
&= a s_0 \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} s_j^{(k-1)*} + \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{ib}{j}\right) s_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} s_{j-i}^{(k-1)*} \\
&= a s_0 f_j + \sum_{i=1}^{j} \left(a + \frac{ib}{j}\right) s_i f_{j-i}. \square
\end{aligned}
$$

Kertymäfunktio F saadaan nyt kaavasta

$$F(j) = \sum_{i=0}^{j} f_i.$$

Lauseen 6.1 tulos antaa tarkan kertymäfunktion arvon kaikkialla. Tyydyttäviä likiarvoja saadaan yleiselläkin vahingon suuruusjakaumalla suorittamalla sopiva diskretisointi. Tarvittava laskentakapasiteetti tulee kuitenkin suureksi r:n kasvaessa.

6.2 Yhdistetyn jakauman approksimointi

Edellä esitetty rekursiokaava antaa periaatteessa tarkan menetelmän yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion laskemiseksi. Käyttökelpoisuutta rajoittaa tarvittava laskentakapasiteetti erityisesti suurissa vakuutuskannoissa. Tästä näkökulmasta on perusteltua tarkastella myös likimääräismenettelyjä. Nämä antavat mahdollisuuden pika-arvioiden tekemiseen ja myös eräiden laadullisten seikkojen esiin tuomiseen.

6.2.1 Yhdistetyn muuttujan rajakäyttäytyminen

Tarkastellaan kokonaisvahinkomäärän rajakäyttäytymistä vahinkojen lukumäärän odotusarvon kasvaessa. Yksittäisen vahingon suuruuden ja struktuurimuuttujan jakauma pidetään rajankäynnissä kiinteänä. Tulokset sopivat parhaiten suuren vakuutusyhtiön kokonaisvahinkomäärien hahmottamiseen.

Todennäköisyyden $\mathbb{P}(X \leq x)$ *normaaliapproksimaatio* määritellään ehdosta

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X} \leq \frac{x - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right) \approx \phi\left(\frac{x - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}\right),$$

missä ϕ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Seuraava lause osoittaa, että approksimaatio on perusteltu yhdistetylle Poisson-muuttujalle.

Lause 6.2.1.1. Olkoon $X = X_\lambda$ yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S). Oletetaan, että

$$a_2 = \int_0^\infty z^2 dS(z) \in (0, \infty).$$

Silloin mielivaltaiselle $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda)}{\sigma_{X_\lambda}} \le x\right) = \phi(x).$$

Todistus. Lauseen 4.3 nojalla voidaan kirjoittaa

$$X_\lambda =_L X_{\lfloor\lambda\rfloor} + \xi_\lambda,$$

missä ξ_λ ja $X_{\lfloor\lambda\rfloor}$ ovat riippumattomia ja

$$\xi_\lambda =_L X_{\lambda - \lfloor\lambda\rfloor}.$$

Siis

$$\frac{X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda)}{\sigma_{X_\lambda}} =_L \frac{X_{\lfloor\lambda\rfloor} - \mathbb{E}\left(X_{\lfloor\lambda\rfloor}\right)}{\sigma_{X_{\lfloor\lambda\rfloor}}} \cdot \frac{\sigma_{X_{\lfloor\lambda\rfloor}}}{\sigma_{X_\lambda}} + \frac{\xi_\lambda - \mathbb{E}(\xi_\lambda)}{\sigma_{X_\lambda}}. \tag{6.2.1.1}$$

Lauseen 4.3 nojalla voidaan kirjoittaa

$$X_{\lfloor\lambda\rfloor} = \eta_1 + \cdots + \eta_{\lfloor\lambda\rfloor},$$

missä $\eta_1, \ldots, \eta_{\lfloor\lambda\rfloor}$ ovat riippumattomia yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia parametrilla $(1, S)$. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{\lfloor\lambda\rfloor} - \mathbb{E}\left(X_{\lfloor\lambda\rfloor}\right)}{\sigma_{X_{\lfloor\lambda\rfloor}}} \le x\right) = \phi(x). \tag{6.2.1.2}$$

Toisaalta

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_{X_{\lfloor\lambda\rfloor}}}{\sigma_{X_\lambda}} = \lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\frac{\lfloor\lambda\rfloor}{\lambda}} = 1 \tag{6.2.1.3}$$

ja

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{\xi_\lambda - \mathbb{E}(\xi_\lambda)}{\sigma_{X_\lambda}}\right)^2\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{(\lambda - \lfloor\lambda\rfloor)a_2}{\lambda a_2} = 0. \tag{6.2.1.4}$$

Yleisesti, jos B, B_λ, C_λ ja D_λ ovat satunnaismuuttujia ja c ja d vakioita sekä

$$\begin{aligned} B_\lambda &\underset{\text{i.d.}}{\to} B \quad \text{(jakaumaltaan suppeneminen)}, \\ C_\lambda &\underset{\text{P}}{\to} c \quad \text{(todennäköisyyden suhteen suppeneminen)}, \\ D_\lambda &\underset{\text{P}}{\to} d, \end{aligned}$$

niin $C_\lambda B_\lambda + D_\lambda \underset{\text{i.d.}}{\to} cB + d$. Lauseen väite seuraa tästä ja raja-arvoista (6.2.1.2) - (6.2.1.4), sillä tuloksen (6.2.1.4) L^2-suppenemisesta seuraa suppeneminen todennäköisyyden suhteen. □

Yhdistetylle painotetulle Poisson-muuttujalle lauseen 6.2.1.1 tulos ei päde. Raja-arvo on kyllä yleensä olemassa, mutta rajajakauma ei ole normaali.

Lause 6.2.1.2. Olkoon $X = X_\lambda$ yhdistetty painotettu Poisson-muuttuja parametrilla (λ, Q, S) ja H struktuurimuuttujan kertymäfunktio. Oletetaan, että $\mathrm{Var}(Q) < \infty$ ja että $a_2 \in (0, \infty)$. Silloin

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_\lambda}{\mathbb{E}(X_\lambda)} \leq x\right) = H(x)$$

kaikissa H:n jatkuvuuspisteissä x. Toisin sanoen

$$X_\lambda/\mathbb{E}(X_\lambda) \underset{\text{i.d.}}{\to} Q.$$

Todistus. Olkoon $\mathrm{Var}(X_\lambda|Q)$ muutujan X_λ ehdollinen varianssi ehdolla Q,

$$\mathrm{Var}(X_\lambda|Q) := \mathbb{E}\left((X_\lambda - \mathbb{E}(X_\lambda|Q))^2|Q\right).$$

Ilmeisesti X_λ:n ehdollinen kertymäfunktio ehdolla $Q = q$ on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla $(\lambda q, S)$. Lauseen 4.2 nojalla

$$\mathrm{Var}(X_\lambda|Q) = \lambda a_2 Q.$$

Olkoon

$$a_1 = \mathbb{E}(Z) = \int_0^\infty z dS(z).$$

Silloin

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_\lambda}{\mathbb{E}(X_\lambda)} - Q\right)^2\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^2 a_1^2}\mathbb{E}\left(\mathrm{Var}(X_\lambda|Q)\right) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{a_2}{\lambda a_1^2} = 0.$$

Kyseessä on L^2-suppeneminen, josta seuraa suppeneminen jakauman suhteen. □

Lauseiden 6.2.1.1 ja 6.2.1.2 valossa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa voidaan pitää tavallista yhdistettyä Poisson-jakaumaa vaarallisempana. Jälkimmäisessä voidaan hieman epätäsmällisesti ajatella, että havainnot sijaitsevat lähellä odotusarvoa (etäisyys verrannollinen λ:n neliöjuureen). Yhdistetyn painotetun Poisson-jakauman tapauksessa vastaava etäisyys on verrannollinen λ:aan. Erityisesti lauseessa 6.2.1.1

$$X_\lambda/\lambda \underset{\text{i.d.}}{\to} a_1,$$

kun $\lambda \to \infty$. Lauseessa 6.2.1.2 suppeneminen tapahtuu kohti satunnaismuuttujaa,

$$X_\lambda/\lambda \underset{\text{i.d.}}{\to} a_1 Q.$$

6.2.2 Vinouden huomioon ottavat approksimaatiot

Lauseen 6.2.1.1 nojalla kokonaisvahinkomäärän normaaliapproksimaatio on perusteltu yhdistetyn Poisson-jakauman tapauksessa, mikäli vakuutuskanta on suuri. Tarkkuutta voidaan kuitenkin usein parantaa ottamalla huomioon myös tarkasteltavan muuttujan vinous. Esityksen (4.11) nojalla yhdistetyn Poisson-jakauman vinous suppenee kohti nollaa vain $1/\sqrt{\lambda}$:n vauhtia. Normaalijakauman vinous taas on nolla.

Yhdistetyn painotetun Poisson-jakauman tapauksessa normaaliapproksimaatio ei ole perusteltu lauseen 6.2.1.2 valossa. Toisaalta lauseen soveltaminen suoraan on ongelmallista siksi, että struktuurimuuttujan jakauma ei välttämättä ole tarkkaan tiedossa. Tietämys voi rajoittua muutamaan alimpaan momenttiin. Seuraavassa esitettäviä menetelmiä sovelletaan toisinaan myös painotettuun muuttujaan, vaikkakin teoreettisia perusteluja voidaan esittää lähinnä yhdistetylle Poisson-muuttujalle.

Approksimaatiomenetelmien taustalla voidaan nähdä seuraava ongelma. Olkoon X tarkasteltava yhdistetty muuttuja. Etsittävä sellainen funktio ψ, että $\psi(X)$ noudattaa 'tarkasti' standardoitua normaalijakaumaa. Lisäksi ψ:n tulisi olla riittävän yksinkertainen. Esimerkiksi ψ:n sallitaan riippua vain X:n joistakin alimmista momenteista. Näinhän on normaaliapproksimaatiossa, jossa ψ riippuu kahdesta alimmasta momentista,

$$\psi(X) = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}.$$

NP-approksimaatio Olkoon X_λ kuten lauseessa 6.2.1.1. Tarkastellaan edelleen yhdistetyn muuttujan rajakäyttäytymistä, kun $\lambda \to \infty$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi λ:aa ei kirjoiteta näkyviin X:n alaindeksiksi. Okoon $\overline{X}$ standardoitu muuttuja,

$$\overline{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}.$$

Tarkastellaan seuraavassa yksinkertaistettua tilannetta olettamalla, että $\lambda \in \mathbb{N}$ ja että X:n jakauma ei keskity millekään hilalle $\{a + nh | n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $a, h \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan todennäköisyyttä $\mathbb{P}(\overline{X} \le x)$ rajalla, kun $\lambda \to \infty$.

Olkoon X:n vinous γ, kun $\lambda = 1$. Oletetaan, että γ on äärellinen. Tällöin X:n vinous yleisellä parametrin λ arvolla on

$$\gamma_X = \gamma/\sqrt{\lambda}.$$

Seuraava heuristinen tarkastelu johtaa NP-approksimaatioon. Kts. myös Sundt (1984). Pätee

$$| \, \mathbb{P}(\overline{X} \le x) - \phi(x) - \frac{\gamma}{6\sqrt{\lambda}} \left(1 - x^2\right) \phi'(x) \, | = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

tasaisesti alueessa $x \in \mathbb{R}$, kun $\lambda \to \infty$. Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971), luku XVI. Tulos voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leq x) = \phi(x) + \frac{\gamma}{6\sqrt{\lambda}} \left(1 - x^2\right) \phi'(x) + o\left(\gamma_X\right), \tag{6.2.2.1}$$

missä ordo-termi on tasainen yli $\mathbb{R}$:n. Suora normaaliapproksimaatio antaa heikomman

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leq x) = \phi(x) + O(\gamma_X),$$

joten (6.2.2.1) on jo tämän tarkennus.

NP-approksimaatiossa etsitään sellainen yksinketainen muunnos φ, että

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leq \varphi(y)) = \phi(y) + o(\gamma_X).$$

Jos φ:llä on käänteisfunktio $\nu = \varphi^{-1}$ tarkasteltavassa alueessa, niin valitsemalla $y = \nu(x)$ saadaan

$$\mathbb{P}(\overline{X} \leq x) = \mathbb{P}(\overline{X} \leq \varphi(y)) = \phi(y) + o(\gamma_X). \tag{6.2.2.2}$$

On siis saatu approksimaatio, jonka virhetermi on $o(\gamma_X)$. NP-approksimaatiossa

$$\varphi(y) = y + \frac{\gamma_X}{6}\left(y^2 - 1\right) \tag{6.2.2.3}$$

ja

$$\nu(x) = -\frac{3}{\gamma_X} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_X^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_X}x}.$$

Esityksen (4.11) nojalla vinous γ_X on positiivinen, joten φ:llä on käänteiskuvaus esimerkiksi alueessa $y \geq 1$. Tällöin ν on määritelty alueessa $x \geq 1$.

Tyypillisesti approksimaatiota sovelletaan jakauman oikeaan häntään. Todennäköisyyden $\mathbb{P}(X \geq x)$ *NP-approksimaatio* on

$$\mathbb{P}(X \geq x) \approx 1 - \phi(y),$$

missä

$$y = -\frac{3}{\gamma_X} + \sqrt{\frac{9}{\gamma_X^2} + 1 + \frac{6}{\gamma_X}\frac{x - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}}.$$

Usein kysymys esitetään toisin päin: on määrättävä sellainen x, että

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \epsilon,$$

missä $\epsilon > 0$ on annettu. NP-approksimaatiota sovelletaan tällöin seuraavasti. Olkoon $\phi(y_\epsilon) = 1 - \epsilon$. Tällöin

$$\mathbb{P}(\overline{X} \geq \varphi(y_\epsilon)) \approx \epsilon.$$

Kysytty x saadaan ehdoista

$$\begin{cases} \overline{x} = y_\epsilon + \frac{\gamma_X}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right) \\ x = \mathbb{E}(X) + \overline{x}\sigma_X. \end{cases}$$

NP-approksimaatio rajoittuu siis oikeaan häntään ja alueeseen $\overline{x} \geq 0$. Tämä takaa, että $\nu(\overline{x})$ on reaalinen. Approksimaatio toimii kohtuullisesti, jos vinous γ_X on pieni. Peukalosääntö: menetelmä ei sovellu jos $\gamma_X > 1$.

Wilson-Hilferty -approksimaatio Gamma-jakaumaa käytetään toisinaan sellaisenaan kokonaisvahinkomäärän jakauman approksimoimiseen. Lause 6.2.1.2 antaa tälle tietyn perustelun, mikäli struktuutimuuttujalla on Polya-jakauma. Wilson-Hilferty -approksimaatio on taas kehitetty gamma-jakauman approksimoimiseen. Tämä antaa aiheen soveltaa sitä kokonaisvahinkomäärän arvioimiseen.

Olkoon X kokonaisvahinkomuuttuja ja

$$\overline{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$$

standardoitu muuttuja. Vastaavasti jos $x \in \mathbb{R}$, kirjoitetaan

$$\overline{x} = \frac{x - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}.$$

Todennäköisyyden $\mathbb{P}(X \leq x)$ *Wilson-Hilferty -approksimaatio* on

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\overline{X} \leq \overline{x}) \approx \phi(W(\overline{x})),$$

missä

$$W(x) = c_1 + c_2(x + c_3)^{\frac{1}{3}}$$

ja

$$c_1 = \frac{1}{3g} - 3g,\ c_2 = 3g^{\frac{2}{3}},\ c_3 = g \text{ ja } g = \frac{2}{\gamma_X}. \tag{6.2.2.4}$$

Jos kääntäen on määrättävä sellainen x, että $\mathbb{P}(X \geq x) = \epsilon$, niin menetellään seuraavasti:

1) määrätään y_ϵ siten, että $\phi(y_\epsilon) = 1 - \epsilon$
2) määrätään $\overline{x}$ ehdosta

$$\overline{x} = \left(\frac{1}{c_2}\right)^3 (y_\epsilon - c_1)^3 - c_3$$

3) määrätään $x = \mathbb{E}(X) + \overline{x}\sigma_X$.

Muunnos edellä kohdassa 2) toteutetaan käyttäen kolmannen asteen polynomia. NP-approksimaatiossa käytettiin toisen asteen polynomia.

Wilson-Hilferty -approksimaation tarkkuus ovat samaa luokkaa kuin NP-menetelmällä. Etuna on, että ehto

$$G(x) = \phi(W(x)),\ x \in \mathbb{R},$$

määrittelee kertymäfunktion. Approksimaatiota voidaan näin ollen soveltaa koko jakauman arvioimiseen. NP-menetelmän etuna on analyyttisen käsittelyn yksinkertaisuus.

Todettakoon lopuksi, että Wilson-Hilferty -approksimaatio on erikoistapaus *Haldanen approksimaatiosta*. Tässä menetelmässä pyritään määräämään parametri h siten, että muuttujan

$$Y = \left(\frac{X}{\mathbb{E}(X)}\right)^h$$

vinous olisi nolla. Tämän jälkeen sovelletaan normaaliapproksimaatiota standardoituun muuttujaan

$$\overline{Y} = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y}.$$

Wilson-Hilferty -approksimaatio saadaan valitsemalla $h = 1/3$. Haldanen approksimaation soveltaminen on työläämpää kuin mainittujen kahden muun menetelmän mutta tarkkuus usein parempi.

6.2.3 Approksimaatiomenetelmien sovelluksia

Tarkastellaan edellä esitettyjen menetelmien soveltamista pääomavaatimusten mitoittamiseen. Olkoon yleisesti L rahamäärä, jonka maksamiseen toimija on sitoutunut esimerkiksi seuraavan vuoden aikana. Liitetään tähän reaaliluku, joka kuvaa riskin määrää. Olkoon $p \in (0, 1)$ annettu. Määritellään $\mathrm{VaR}[L; p]$ (*value at risk tasolla* p) ehdosta

$$\mathrm{VaR}[L; p] = F_L^{-1}(p),$$

misssä F_L on L:n kertymäfunktio ja

$$F_L^{-1}(p) = \inf\{x \mid F_L(x) \geq p\}.$$

Tällöin

$$F_L\left(\mathrm{VaR}[L; p]\right) \geq p.$$

Siis $\mathrm{VaR}[L; p]$ riittää sitoumusten täyttämiseen todennäköisyydellä $\geq p$ ja $\mathrm{VaR}[L; p]$ on minimaalinen tällainen rahamäärä. Tyypillisesti p on lähellä ykköstä. Esimerkiksi

$$p \in (0.99, 0.999).$$

Todettakoon vielä, että jos F_L on jatkuva, niin

$$F_L^{-1}(p) = \inf\{x \mid F_L(x) = p\} \quad \text{ja} \quad F_L\left(\mathrm{VaR}[L;p]\right) = p. \tag{6.2.2.5}$$

Järkevän tuntuinen käsite on myös häntää koskeva ehdollinen odotusarvo (*conditional* VaR, CVaR$[L;p]$). Määritelmä on

$$\mathrm{CVaR}[L;p] = \mathbb{E}\left(L - \mathrm{VaR}[L;p] \mid L > \mathrm{VaR}[L;p]\right).$$

Tämä kuvaa tappion suuruutta, mikäli sitoumuksesta L ei selvitä.

Seuraavassa $L = X$, missä X on yhtiön tulevan vuoden kokonaisvahinkomäärä. Oletetaan, että esiintyvien kokonaisvahinkomäärien vinoudet ovat positiivisia ja äärellisiä. Lisäksi X:n jakaumaa tullaan approksimoimaan normaalijakaumalla tai tämän johdannaislla, jolloin yksinkertaisemmat kaavat (6.2.2.5) ovat käytettävissä.

Alkupääoman mitoitus Oletetaan, että yhtiöllä on vuoden alussa käytettävissä *alkupääoma* U_0. Olkoon vuoden kokonaisvahinkomäärä X. Oletetaan, että yhtiö saa vuoden aikana *vakuutusmaksuja* määrän $P = (1+v)\mu_X$, misä $\mu_X = \mathbb{E}(X)$ on ns. *riskimaksu* ja $v > 0$ *varmuuslisä.*

Tarkastellaan yhtiön *vararikkotodennäköisyyttä vuoden aikajänteellä.* Vararikko katsotaan tapahtuvaksi, jos alkupääoma ja vakuutusmaksut yhdessä eivät riitä vahinkojen korvaamiseen. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, mikäli vararikkotodennäköisyys ei ylitä tasoa ϵ. Kysytään tarvittavaa alkupääomaa, kun muut parametrit on annettu. Toisin sanoen on määrättävä sellainen alkupääoma U_0, että

$$\mathbb{P}(U_0 + P - X < 0) = \epsilon$$

eli

$$\mathbb{P}(X > U_0 + P) = \epsilon.$$

Nähdään, että vaadittava alkupääoma on

$$U_0 = \mathrm{VaR}[X; 1-\epsilon] - P.$$

Olkoon $\phi(y_\epsilon) = 1-\epsilon$. Soveltamalla normaaliapproksimaatiota X:n jakaumaan saadaan

$$\begin{aligned} U_0 &= \mu_X + y_\epsilon \sigma_X - P \\ &= y_\epsilon \sigma_X - v\mu_X. \end{aligned}$$

NP-approksimaatio antaa

$$U_0 + P = \mu_X + \left(y_\epsilon + \frac{\gamma_X}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right)\sigma_X$$

eli

$$U_0 = \left(y_\epsilon + \frac{\gamma_X}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right)\sigma_X - v\mu_X.$$

Vastaavasti Wilson-Hilferty -approksimaatio antaa

$$U_0 = \left(\left(\frac{1}{c_2}\right)^3 (y_\epsilon - c_1)^3 - c_3)\right)\sigma_X - v\mu_X,$$

missä c_1, c_2 ja c_3 ovat kaavan (6.2.2.4) mukaisia.

Fuusion vaikutuksesta alkupääomaan Tarkastellaan kahden yhtiön yhdistymistä eli fuusiota. Olkoon yhtiön i kokonaisvahinkomäärä X_i, $i = 1, 2$. Merkitään kokonaisvahinkomäärien tunnuslukuja symboleilla μ_i, σ_i ja γ_i sekä varmuuslisiä symboleilla v_i, $i = 1, 2$. Alaindeksi kertoo siis yhtiön.

Tarkastellaan alkupääomavaatimuksia NP-approksimaation valossa. Yhtiön i vaatimus on

$$U_i = \left(y_\epsilon + \frac{\gamma_i}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right)\sigma_i - v_i\mu_i.$$

Fuusiossa syntyvän yhtiön alkupääomavaatimus on

$$U_0 = \left(y_\epsilon + \frac{\gamma}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\right)\sigma - v\mu,$$

missä μ, σ ja γ ovat fuusiossa syntyneen yhtiön kokonaisvahinkomäärän tunnusluvut ja v varmuuslisä. Oletetaan seuraavassa, että $y_\epsilon > 1$ ja että σ_i ja γ_i ovat äärellisiä ja aidosti positiivisia, $i = 1, 2$.

Oletetaan, että yhtiöiden kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Tullaan osoittamaan, että $U_0 < U_1 + U_2$. Toisin sanoen alkupääomavaatimus fuusion jälkeen on pienempi kuin fuusioitavien yhtiöiden yhteenlaskettu alkupääomatarve.

Fuusiossa syntyneen yhtiön tunnusluvuille pätee

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2, \\ v\mu &= v_1\mu_1 + v_2\mu_2 \end{aligned}$$

ja

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_1 + \sigma_2.$$

Viimeinen yhtälö seuraa riippumattomuusoletuksesta. Samoin riippumattomuudesta seuraa, että

$$\mathbb{E}\left((X_1 + X_2 - \mu_1 - \mu_2)^3\right) = \mathbb{E}\left((X_1 - \mu_1)^3\right) + \mathbb{E}\left((X_2 - \mu_2)^3\right).$$

Tämän todistus jätetään harjoitustehtäväksi. Saadaan

$$\begin{aligned}
U_1 + U_2 - U_0 &= y_\epsilon(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma) - (v_1\mu_1 + v_2\mu_2 - v\mu) + \frac{1}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)(\gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 - \gamma\sigma) \\
&> \frac{1}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\left(\frac{\mathbb{E}\left((X_1-\mu_1)^3\right)}{\sigma_1^2} + \frac{\mathbb{E}\left((X_2-\mu_2)^3\right)}{\sigma_2^2} - \gamma\sigma\right) \\
&> \frac{1}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\left(\frac{\mathbb{E}\left((X_1-\mu_1)^3\right) + \mathbb{E}\left((X_2-\mu_2)^3\right)}{\sigma^2} - \gamma\sigma\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(y_\epsilon^2 - 1\right)\left(\frac{\mathbb{E}\left((X_1+X_2-\mu_1-\mu_2)^3\right)}{\sigma^2} - \gamma\sigma\right) = 0.
\end{aligned}$$

Siis $U_0 < U_1 + U_2$. Fuusiosta saatava suhteellinen hyöty on

$$1 - \frac{U_0}{U_1 + U_2} \in (0, 1).$$

Päättely on hieman yksinkertaisempaa, jos sovelletaan normaaliapproksimaatiota kokonaisvahinkomäärien jakaumiin. Tällöin

$$U_i = y_\epsilon\sigma_i - v_i\mu_i, \quad i = 1, 2,$$

ja

$$\begin{aligned}
U_0 &= y_\epsilon\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - v_1\mu_1 - v_2\mu_2 \\
&= y_\epsilon\left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 - \sigma_2\right) + U_1 + U_2 \\
&< U_1 + U_2.
\end{aligned}$$

Normaaliapproksimaatioon perustuva alkupääomavaatimus pienenee fuusiossa, vaikka X_1 ja X_2 eivät olisikaan riippumattomia. Olkoon nimittäin $\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$. Tällöin

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}.$$

Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \mathbb{E}\left((X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)\right) \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}\left((X_1-\mu_1)^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left((X_2-\mu_2)^2\right)} = \sigma_1\sigma_2.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
U_0 &= y_\epsilon\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}} - v_1\mu_1 - v_2\mu_2 \\
&\leq y_\epsilon\left(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2} - \sigma_1 - \sigma_2\right) + U_1 + U_2 \\
&= U_1 + U_2.
\end{aligned}$$

Yhtäsuuruus pätee vain ääritilanteessa $\sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2$. Todettakoon kuitenkin, että tulos ei päde kaikilla kriteereillä. Fuusio ei siis automaattisesti johda pääomavaatimuksen vähenemiseen edellä esitetyssä mielessä.

6.3 Yhdistetyn muuttujan jakauman simulointi

Tietokoneen avulla pystytään yleensä tuottamaan riippumattomia havaintoja välille $(0,1)$ tasan jakautuneista satunnaismuuttujista. Näitä kutsutaan *satunnaisluvuiksi*. Tarkkaan ottaen nämä ovat *pseudo-satunnaislukuja*, jotka muodostetaan deterministisen algoritmin avulla. Vaikutelma saattaa kuitenkin olla varsin aito. Kuten myöhemmin nähdään, näiden avulla pystytään tuottamaan havaintoja mielivaltaisesta annetusta jakaumasta. Tämä antaa mahdollisuuden kiinnostuksen kohteena olevien todennäköisyyksien tai esimerkiksi odotuasrvojen 'tilastolliseen' estimoimiseen.

Simulointia käytetään paljon esimerkiksi siksi, että se antaa estimaattien lisäksi konkreettisen kuvan esimerkiksi stokastisen prosessin realisaatioista. Menetelmä on myöskin joustava. Mutkikkaitakin ongelmia voidaan lähestyä simuloinnin avulla. Analyyttinen käsittely on tässä mielessä rajoittuneempi. Toisaalta analyyttiset menetelmät antavat laadullista informaatiota esimerkiksi mallin elementtien vaikutuksesta tarkasteltaviin todennäköisyyksiin. Simulointi taas tuottaa numeroarvoja tai graafisia kuvia, joiden tulkinta on vaikeampaa.

6.3.1 Havaintojen tuottaminen simuloimalla

Oletetaan, että käytössä on tietokone, jolla pystytään tuottamaan haluttu määrä riippumattomia $T(0,1)$-jakautuneita satunnaislukuja ts. välille $(0,1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Näiden yhteinen kertymäfunktio T määräytyy ehdoista

$$T(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0 \\ x, & \text{jos } x \in [0,1] \\ 1, & \text{jos } x > 1. \end{cases}$$

Lause 6.3.1.1. Olkoon F kertymäfunktio ja R $T(0,1)$-jakautunut satunnaismuuttuja. Määritellään

$$R_F = \min\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq R\}.$$

Silloin R_F on F-jakautunut eli

$$\mathbb{P}(R_F \leq x) = F(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Ensinnäkin R_F on hyvin määritelty, koska kertymäfunktio on oikealta jatkuva. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$. Silloin

a) $R \leq F(x_0) \Rightarrow R_F \leq x_0$. Tämä seuraa siitä, että R_F on minimaalinen ehdon $F(x) \geq R$ täyttävä luku x annetulla $\omega \in \Omega$.

b) $R > F(x_0) \Rightarrow R > F(y)$ kaikilla $y \leq x_0 \Rightarrow R_F > x_0$. Tämä seuraa siitä, että F on kertymäfunktiona kasvava.

Nähdään, että

$$R \leq F(x_0) \Leftrightarrow R_F \leq x_0.$$

Koska $F(x_0) \in [0, 1]$, niin

$$\mathbb{P}(R_F \leq x_0) = \mathbb{P}(R \leq F(x_0)) = T(F(x_0)) = F(x_0). \square$$

Yhdistetyn Poisson-jakauman kertymäfunktiolla ei ole yksinkertaista analyyttistä esitystä, joten edellistä lausetta ei voida soveltaa suoraan. Oletetaan, että Poisson-parametri λ ja yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio S on annettu. Simulointikierroksella i menetellään tällöin seuraavasti.

1) Generoidaan Poisson-jakautunut satunnaisluku parametrilla λ. Olkoon tämä K_i.

2) Generoidaan K_i kappaletta toisistaan ja K_i:stä riippumatonta S-jakautunutta satunnaislukua. Olkoot nämä $Z_1, \ldots, Z_{K_i}$.

3) Asetetaan $X_i = Z_1 + \cdots + Z_{K_i}$.

Toistamalla esitetyt 3 vaihetta pitäen kaikki satunnaisluvut toisistaan riippumattomina saadaan ilmeisesti riippumaton otos $X_1, X_2, \ldots$ yhdistetystä Poisson-jakaumasta annetuin parametrein. Vaiheet 1) ja 2) toteutetaan nojautuen lauseeseen 6.3.1.1.

Vastaava menettely sopii yleiseen yhdistettyyn muuttujaan. Yhdistetyn painotetun Poisson-jakauman tapauksessa generoidaan kohdassa 1) ensin havainto struktuurimuuttujasta Q. Olkoon tämä Q_i. Tämän jälkeen generoidaan Poisson-jakautunut satunnaisluku parametrilla λQ_i ja jatketaan kohdasta 2).

6.3.2 Estimointi

Tarkastellaan yleisesti todennäköisyyden $\alpha := \mathbb{P}(X \in A)$ estimoimista, missä A on Borel-joukko. Ajatellaan, että X:n jakauma ei ole esitettävissä suljetussa muodossa, mutta siitä pystytään tuottamaan havaintoja simuloimalla. Muodostetaan N:n suuruinen *otos* X:n jakaumasta ts. generoidaan N riippumatonta tällaista havaintoa. Olkoot nämä $X_1, \ldots, X_N$. Estimoidaan

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_N = \frac{\#\{i \mid X_i \in A\}}{N}. \tag{6.3.2.1}$$

Tällöin selvästi

$$\hat{\alpha} = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} I_i, \tag{6.3.2.2}$$

missä $I_i = \mathbb{1}(X_i \in A)$. Siis $I_1, \ldots, I_N$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja

$$\begin{cases} \mathbb{P}(I_i = 0) = \mathbb{P}(X_i \notin A) = 1 - \alpha, \\ \mathbb{P}(I_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \in A) = \alpha. \end{cases}$$

Kyseessä on binomijakauma $\mathrm{Bin}(1, \alpha)$. Erityisesti $\mathbb{E}(I_i) = \alpha$ ja $\mathrm{Var}(I_i) = \alpha(1 - \alpha)$. Näin ollen

$$\mathbb{E}(\hat{\alpha}) = \alpha \tag{6.3.2.3}$$

ja

$$\mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{N}. \tag{6.3.2.4}$$

Tuloksen (6.3.2.3) nojalla $\hat{\alpha}$ on α:n *harhaton* estimaattori. Suurten lukujen lain nojalla

$$\mathbb{P}(\lim_{N \to \infty} \hat{\alpha}_N = \alpha) = 1. \tag{6.3.2.5}$$

Tästä nähdään, että α:n estimointi voisi onnistua käyttämällä suurta otosta.

Simuloinnin avulla saataviin estimaatteihin liittyy aina tilastollinen virhe. Tämän hallitsemiseksi tarkastellaan seuraavassa kriteereitä otoskoon määräämiseksi. Kun N on suuri, on

$$\frac{I_1 + \cdots + I_N - N\alpha}{\sqrt{N\alpha(1-\alpha)}}$$

likimain $N(0,1)$-jakautunut keskeisen raja-arvolauseen nojalla. Nähdään, että myös

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \tag{6.3.2.6}$$

on likimain $N(0,1)$-jakautunut. Määritellään estimaattorin $\hat{\alpha}$ *tarkkuus* p suhteellisena hajontana

$$p = p_N = \frac{\sigma_{\hat{\alpha}}}{\mathbb{E}(\hat{\alpha})} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha N}}.$$

Sopiva pysäytyssääntö simuloinnille on esimerkiksi vaatimus, että $p \leq p_0$, missä p_0 on ennalta valittu. Tarvittava otoskoko on tällöin

$$N = \frac{1-\alpha}{\alpha p_0^2}.$$

Haluttu tarkkuus siis saavutetaan, kun suoritetaan riittävä määrä toistoja. Kriteeriä ei voida käyttää yleensä suoraan, koska α:aa ei tunneta. Pysäytyssääntö onkin perustettava myös otokseen. Tällöin N toiston jälkeen *saavutettu tarkkuus* $\hat{p}_N$ määrätään esimerkiksi

$\sigma_{\hat{\alpha}_N}$:n ja $\mathbb{E}(\hat{\alpha}_N)$:n estimaattien osamääränä. Näiden luonnolliset estimaatit ovat puolestaan $\mathbb{E}(\hat{\alpha}_N) = \hat{\alpha}_N$ ja

$$\sigma_{\hat{\alpha}_N} = \sqrt{\frac{N^{-1}\sum_{i=1}^N I_i^2 - (N^{-1}\sum_{i=1}^N I_i)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\hat{\alpha}_N(1-\hat{\alpha}_N)}{N}}.$$

Ehkäpä luonnollisempi pysäytyskriteeri saadaan vaatimalla, että

$$\mathbb{P}\left(\frac{\mid \hat{\alpha} - \alpha \mid}{\alpha} \geq \delta\right) < \epsilon, \tag{6.3.2.7}$$

missä ϵ ja δ ovat ennalta kiinnitettyjä (pieniä) positiivilukuja. Vaaditaan siis, että estimaatin suhteellinen virhe on pieni suurella todennäköisyydellä. Likimain samaan päästään kuitenkin asettamalla tarkkuusvaatimus edellä sopivaksi. Nimittäin valitaan b siten, että $\phi(b) = 1 - \epsilon/2$ ja asetetaan $p_0 = \delta/b$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{\alpha} \geq \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{\alpha} \geq bp_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \geq b\right) \\
&\approx 2(1 - \phi(b)) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Esimerkki 6.3.2.1. Olkoon $\epsilon = 0.05$ ja $\delta = 0.1$. Tällöin $b \approx 2$, joten asetetaan $p_0 = 0.05$. Oletetaan, että tarkasteltava todennäköisyys α on luokkaa 10^{-3}. Tarvittavien toistojen määrä on edellä esitetyn nojalla

$$N \approx \frac{1-\alpha}{\alpha p_0^2} \approx 400.000.$$

6.3.3 Simuloinnin tehostamisesta

Edellisessä kappaleessa esitetty esimerkki osoittaa, että tavoitetarkkuuden saavuttaminen edellyttää suurta toistomäärää, jos tarkasteltavat todennäköisyydet ovat pieniä. Yhden havainnon tuottaminen yhdistetystä muuttujasta on jo sinänsä aikaa vievää, erityisesti jos lukumäärämuuttujan odotusarvo on suuri. Seuraavassa tarvittavien toistojen määrää pyritään pienentämään sopivan mitanvaihdon avulla.

Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Oletetaan, että $\mu_\xi \in (0, \infty)$. Olkoon $a > 0$. Tarkastellaan todennäköisyyden

$$\alpha = \alpha_n := \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right)$$

estimoimista, kun n on suuri. Suurten lukujen lain nojalla $\alpha_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

Konjugaattijakaumat Olkoon P muuttujan ξ jakauma, M_ξ momentit generoiva funktio ja c_ξ kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että c_ξ on äärellinen pisteessä $t \in \mathbb{R}$ ts.

$$c_\xi(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{t\xi}\right) < \infty.$$

Määritellään jakauma P_t ehdosta

$$P_t(B) = \int_B e^{tx-c_\xi(t)} dP(x) = \mathbb{E}\left(e^{t\xi - c_\xi(t)} \mathbb{1}(\xi \in B)\right) \tag{6.3.3.1}$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}$. Helposti nähdään, että P_t on todella todennäköisyysjakauma eli $P_t(\mathbb{R}) = 1$. Kutsutaan P_t:tä P:n *konjugaattijakaumaksi parametrilla* t tai P:n *Esscher-muunnokseksi parametrilla* t. Yleisen terminologian mukaan $e^{tx-c_\xi(t)}$ määrittelevässä yhtälössä (6.3.3.1) on P_t:n *Radon-Nikodymin derivaatta* P:n suhteen, merkitään

$$\frac{dP_t}{dP}(x) = e^{tx-c_\xi(t)}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska tämä on kaikkialla positiivinen, on

$$\frac{dP}{dP_t}(x) = e^{-tx+c_\xi(t)}.$$

Tällöin

$$P(B) = \int_B e^{-tx+c_\xi(t)} dP_t(x) = \mathbb{E}_t\left(e^{-t\xi+c_\xi(t)} \mathbb{1}(\xi \in B)\right) \tag{6.3.3.2}$$

kaikilla $B \in \mathcal{B}$, missä $\mathbb{E}_t$ tarkoittaa sitä, että ξ:n jakauma (6.3.3.2):ssa on P_t. Odotusarvoihin voidaan tehdä vastaava muunnos. Olkoon

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP(x)$$

olemassa. Silloin

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{dP}{dP_t}(x) dP_t(x) = \mathbb{E}_t\left(h(\xi) e^{-t\xi+c_\xi(t)}\right).$$

Samoin tietysti

$$\mathbb{E}_t(h(\xi)) = \mathbb{E}\left(h(\xi) e^{t\xi-c_\xi(t)}\right)$$

edellyttäen, että vasen puoli on määritelty.

Oletetaan, että c_ξ on äärellinen jossain t:n ympäristössä. Tällöin

$$\mathbb{E}_t(\xi) = \mathbb{E}\left(\xi e^{t\xi-c_\xi(t)}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\log \mathbb{E}(e^{s\xi})\right)_{|s=t} = c'_\xi(t).$$

Konjugaattijakauma voidaan toisinaan selvittää momentit generoivan funktion avulla. Olkoon

$$M_t(s) = \mathbb{E}_t\left(e^{s\xi}\right)$$

ja

$$c_t(s) = \log M_t(s)$$

kaikilla $s \in \mathbb{R}$. Silloin

$$M_t(s) = \mathbb{E}\left(e^{(t+s)\xi - c_\xi(t)}\right) = \frac{M_\xi(t+s)}{M_\xi(t)}.$$

Nähdään myös, että

$$c_t(s) = c_\xi(t+s) - c_\xi(t).$$

Mikäli M_t pystytään 'tunnistamaan', saadaan P_t selville.

Konjugaattijakaumien avulla pystytään säätelemään ξ:n odotusarvoa seuraavan tuloksen puitteissa. Olkoon $\mathcal{S}$ minimaalinen suljettu väli, jolle pätee

$$P(\mathcal{S}) = \mathbb{P}(\xi \in \mathcal{S}) = 1.$$

Olkoon edelleen

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} \mid c_\xi(s) < \infty\}.$$

Myöhemmin todetaan, että c_ξ on konveksi funktio. Tästä seuraa, että $\mathcal{D}$ on väli. Jos $\mathring{\mathcal{S}}$ on ei-tyhjä ja $\mathcal{D}$ avoin, niin kuvaus $c'_\xi : \mathcal{D} \to \mathring{\mathcal{S}}$ on bijektio ($\mathring{\mathcal{S}}$ tarkoittaa $\mathcal{S}$:n sisäosaa). Jos siis $x \in \mathring{\mathcal{S}}$ on annettu, niin on olemassa yksikäsitteinen P:n konjugaattijakauma P_t, jolle pätee

$$\mathbb{E}_t(\xi) = c'_\xi(t) = x.$$

Perustelujen osalta viitataan lähteeseen Iscoe et al. (1985).

Kohdennettu simulointi Tarkastellaan nyt todennäköisyyden α esityksiä mitan vaihdossa. Olkoot $B_1, \ldots, B_n$ Borel-joukkoja. Ilmeisesti

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) &= P(B_1) \cdots P(B_n) \\
&= \mathbb{E}_t\left(e^{-t\xi_1 + c_\xi(t)} \mathbb{1}(\xi_1 \in B_1)\right) \cdots \mathbb{E}_t\left(e^{-t\xi_n + c_\xi(t)} \mathbb{1}(\xi_n \in B_n)\right) \\
&= \mathbb{E}_t\left(e^{-t(\xi_1 + \cdots + \xi_n) + nc_\xi(t)} \mathbb{1}\left(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\right)\right),
\end{aligned}$$

missä viimeisessä odotusarvossa $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ovat riippumattomia P_t-jakautuneita satunnaismuuttujia. Yleisesti, jos B on $\mathbb{R}^n$:n Borel-joukko, niin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B) &= \mathbb{E}_t\left(e^{-t(\xi_1 + \cdots + \xi_n) + nc_\xi(t)} \mathbb{1}((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B)\right) \\
&= \mathbb{E}_t\left(e^{-tS_n + nc_\xi(t)} \mathbb{1}((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B)\right),
\end{aligned}$$

missä viimeisessä odotusarvossa S_n on n:n riippumattoman P_t-jakautuneen satunnaismuuttujan summa. Tarkasteltaessa tyyppiä $\mathbb{P}(S_n/n \in B)$ olevia todennäköisyyksiä voidaan esitys

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in B\right) = \mathbb{E}_t\left(e^{-tS_n+nc_\xi(t)}\mathbb{1}(S_n/n \in B)\right)$$

tulkita myös siten, että konjugaattimuunnos tehdään summaan S_n. Tämä johtaa samaan jakaumaan kuin vastaavat muunnokset summattaviin riippumattomuus säilyttäen (tämä nähdään helposti generoivien funktioiden avulla, nc_ξ on S_n:n kumulantit generoiva funktio). Erityisesti

$$\alpha = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right) = \mathbb{E}_t\left(e^{-tS_n+nc_\xi(t)}\mathbb{1}(S_n/n \geq (1+a)\mu_\xi)\right), \tag{6.3.3.3}$$

missä oikealla puolella olevan satunnaismuuttujan jakauma syntyy tekemällä konjugaattimuunnos joko summattaviin ξ_i tai summaan S_n. Yhtälö antaa mahdollisuuden estimoida α:aa käyttäen hyväksi P_t-jakautuneita riippumattomia satunnaislukuja. Tuotetaan n tällaista ja asetetaan

$$Y = e^{-tS_n+nc_\xi(t)}\mathbb{1}(S_n/n \geq (1+a)\mu_\xi).$$

Silloin $\mathbb{E}_t(Y) = \alpha$. Tuottamalla riippumattomat havainnot $Y_1, \ldots, Y_N$ muuttujan Y jakaumasta voidaan estimoida

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i. \tag{6.3.3.4}$$

Estimaattori on harhaton ts. $\mathbb{E}_t(\hat{\alpha}_t) = \alpha$. Varianssilla on esitys

$$\mathrm{Var}_t(\hat{\alpha}_t) = \frac{\eta_t - \alpha^2}{N},$$

missä

$$\eta_t = \mathbb{E}_t\left(Y^2\right) = \mathbb{E}_t\left(e^{-2tS_n+2nc_\xi(t)}\mathbb{1}(S_n/n \geq (1+a)\mu_\xi)\right). \tag{6.3.3.5}$$

Pyritään seuraavassa valitsemaan t siten, että estimaattorin varianssi $\mathrm{Var}_t(\hat{\alpha}_t)$ minimoituu. Yhtäpitävästi voidaan minimoida odotusarvoa η_t. Simuloinnin pysäytyssäännöksi valitaan nytkin tyyppiä $p \leq p_0$ oleva vaatimus, missä p_0 on annettu tavoitetarkkuus ja

$$p = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}_t(\hat{\alpha}_t)}}{\mathbb{E}_t(\hat{\alpha}_t)} = \frac{\sqrt{\eta_t - \alpha^2}}{\alpha\sqrt{N}}$$

on tarkkuus, kun toistoja tehdään N kappaletta. Tulkinta on sama kuin tavallisessa simuloinnissa. Pieni η_t merkitsee pientä toistojen määrää.

Nytkin p joudutaan estimoimaan otoksesta. Luonnollinen estimaatti on

$$\hat{p}_N = \frac{\sqrt{\hat{\eta}_t - \hat{\alpha}_t^2}}{\hat{\alpha}_t\sqrt{N}},$$

missä

$$\hat{\alpha}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \quad \text{ja} \quad \hat{\eta}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2.$$

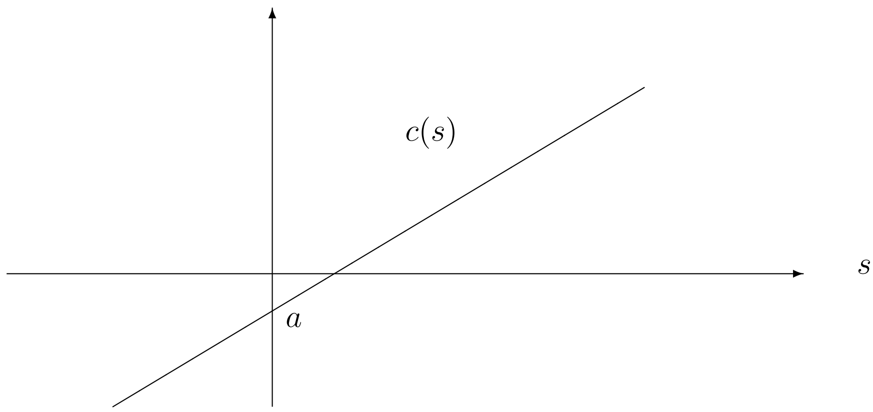
Yllä esitettyä mitan vaihtoon perustuvaa estimointia kutsutaan *kohdennetuksi simuloinniksi* (engl. importance sampling).

Suurten poikkeamien teoriaa Edellä esitetyn minimointiongelman ratkaisemisessa nojaudutaan *suurten poikkeamien teoriaan.* Esitetään seuraavassa muutamia tähän liittyviä käsitteitä ja tuloksia. Teoria katsotaan alkaneeksi vuonna 1938 ns. Cramérin lauseesta. Huomattavaa kehitystä on tapahtunut viime vuosikymmeninä. Mainittakoon esimerkkinä Gärtner-Ellisin lause, joka sallii riippuvuutta summattaville $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (Gärtner (1977), Ellis (1984)).

Olkoot muuttujat $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ja $S_1, S_2, \ldots$ kuten kappaleen 6.3.3 alussa. Olkoon ξ-muuttujien yhteinen jakauma P. Määritellään funktion c_ξ *konveksi konjugaatti* c_ξ^* ehdosta

$$c_\xi^*(v) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sv - c_\xi(s)\}.$$

Tällä on seuraava hyödyllinen geometrinen tulkinta.



Kuvassa c:n tangentin kulmakerroin on v. Konjugaattifunktion arvo $c^*(v)$ on tangentin ja pystyakselin leikkauspisteen a etäisyys origosta.

Lemma 6.3.3.1. Funktioilla c_ξ ja c_ξ^* on seuraavat ominaisuudet.

(i) Molemmat ovat konvekseja.
(ii) $c_\xi^*(v) \geq 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}$.
(iii) $c_\xi^*(\mu_\xi) = 0$.
(iv) Jos $c_\xi'(s_v) = v$ jollain $s_v \in \mathcal{D}$, niin $c_\xi^*(v) = s_v v - c_\xi(s_v)$.

Todistus (pääpiirteissään). Funktion c_ξ konveksisuus seuraa Hölderin epäyhtälöstä. Funktio c_ξ^* on konveksi konveksien (lineaaristen) funktioiden pisteittäisenä supremumina. Selvästi

$$c_\xi^*(v) \geq 0 \cdot v - c_\xi(0) = 0$$

kaikilla $v \in \mathbb{R}$. Koska $s \to sv - c_\xi(s)$ määrittelee konkaavin funktion, se saavuttaa globaalin maksiminsa jokaisessa derivaatan nollakohdassa. Siis (iv) pätee. Jos $c_\xi'(0)$ on olemassa, niin $\mu_\xi = c_\xi'(0)$. Tällöin

$$c_\xi^*(\mu_\xi) = 0 \cdot \mu_\xi - c_\xi(0) = 0.$$

Kohta (iii) pätee myös, kun c_ξ ei ole derivoituva origossa. Tämän todistus sivuutetaan. □

Konveksi konjugaatti kuvaa todennäköisyyksiä $\mathbb{P}(S_n/n \in \cdot)$ seuraavasti.

Lause 6.3.2.2 (Cramérin lause). Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$ avoin. Silloin

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in A) \geq -\inf\{c_\xi^*(v) \mid v \in A\}.$$

Olkoon $B \subseteq \mathbb{R}$ suljettu. Silloin

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in B) \leq -\inf\{c_\xi^*(v) \mid v \in B\}.$$

Lauseen todistus on esitetty esimerkiksi lähteessä Dembo and Zeitouni (1998).

Cramérin lauseessa kiinnitetään huomio todennäköisyyksien häviämisvauhteihin. Saatavat estimaatit eivät ole yleensä kovin tarkkoja, mutta niillä on oma käyttöalueensa. Seurauksena saadaan varsin yleisesti raja-arvoja. Jos esimerkiksi I on väli, niin

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in I) = -\inf\{c_\xi^*(v) \mid v \in I\}$$

paitsi ehkä jos c_ξ^*:llä on hyppy I:n päätepisteessä. Hyppykohtia on maksimissaan kaksi. Raja-arvo kirjoitetaan usein epätäsmällisesti muodossa

$$\mathbb{P}(S_n/n \in I) \approx e^{-n \inf\{c_\xi^*(v) | v \in I\}}.$$

Jatkossa tarvitaan vielä seuraavaa pientä laajennusta. Olkoon $b \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Silloin

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(S_n/n \in [b,\infty)) = -\inf\{c_\xi^*(v) \mid v \in [b,\infty)\}. \tag{6.3.3.6}$$

Asymptoottisesti tehokas simulointijakauma Palataan simulointijakauman valintaongelmaan. Estimoitavana on siis todennäköisyys

$$\alpha_n = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right),$$

missä $a > 0$ on kiinteä. Käytetään P_t -jakautuneisiin satunnaismuuttujiin perustuvaa estimaattoria (6.3.3.4). Tavoitteena on valita t siten, että kaavan (6.3.3.5) mukainen η_t minimoituu rajalla, kun $n \to \infty$.

Oletetaan, että $\mathcal{D}$ on avoin, jolloin $c'_\xi(0) = \mu_\xi$. Oletetaan edelleen, että $c'_\xi(t_a) = (1 + a)\mu_\xi$ eräälle $t_a \in \mathbb{R}$. Lemman 6.3.3.1 nojalla

$$c^*_\xi((1 + a)\mu_\xi) = t_a(1 + a)\mu_\xi - c_\xi(t_a).$$

Olkoon nyt $t \in \mathcal{D}$ mielivaltainen. Koska varianssi on ei-negatiivinen, on (6.3.3.5):n nojalla $\eta_t \geq \alpha^2$. Täten

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \eta_t \geq 2 \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \alpha_n = -2c^*_\xi \left((1 + a)\mu_\xi\right). \tag{6.3.3.7}$$

Viimeinen yhtälö seuraa (6.3.3.6):sta, sillä c^*_ξ on kasvava alueessa $[\mu_\xi, \infty)$. Tämä taas seuraa siitä, että c^*_ξ on konveksi, $c^*_\xi(\mu_\xi) = 0$ ja $c^*_\xi(v) \geq 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}$. Valitaan nyt $t = t_a$. Tällöin

$$\eta_{t_a} = \mathbb{E}_{t_a}\left(e^{-2t_a S_n + 2nc_\xi(t_a)} \mathbb{1}(S_n/n \geq (1 + a)\mu_\xi)\right).$$

Koska $c'_\xi(0) = \mu_\xi < (1+a)\mu_\xi = c'_\xi(t_a)$, niin konveksisuuden nojalla t_a on positiivinen. Siis

$$\begin{aligned} \eta_{t_a} &\leq e^{-2t_a(1+a)\mu_\xi n + 2nc_\xi(t_a)} \\ &= e^{-2n(t_a(1+a)\mu_\xi - c_\xi(t_a))} = e^{-2nc^*_\xi((1+a)\mu_\xi)}, \end{aligned}$$

joten

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \eta_{t_a} \leq -2c^*_\xi((1 + a)\mu_\xi).$$

Vertaamalla tätä yleiseen alarajatulokseen (6.3.3.7) nähdään, että

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \eta_{t_a} = -2c^*_\xi((1 + a)\mu_\xi).$$

Paras mahdollinen häviämisvauhti saadaan siis valitsemalla $t = t_a$. Voidaan osoittaa, että muilla parametrivalinnoilla häviämisvauhti on aidosti huonompi. Tulos voidaan lisäksi laajentaa koskemaan konjugaattijakaumia yleisempiäkin perheitä. Perusteluja on esitetty lähteessä Bucklew et al. (1990).

Yhdistetyn Poisson-jakauman simulointi Sovelletaan edellä saatua tulosta yhdistettyyn Poisson-jakaumaan. Olkoon $X = X_\lambda$ kuten lauseessa 6.2.1.1. Tarkastellaan nytkin rajankäyntiä, missä λ kasvaa ja yksittäisen vahingon suuruusjakauma S on λ:sta riippumaton. Oletetaan, että λ on suuri kokonaisluku. Koska X voidaan ajatella λ:n riippumattoman yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan summaksi, missä summattavien parametri on $(1, S)$, niin edellä esitettyä teoriaa voidaan soveltaa. Nyt tarkastellaan todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}(X \geq (1 + a)\mu_X). \tag{6.3.3.8}$$

Tässä tapauksessa on kätevintä tuottaa havaintoja suoraan X:n konjugaattijakaumasta. Optimaalinen parametri määräytyy selvästi ehdosta

$$c'_X(t_a) = (1+a)\mu_X. \tag{6.3.3.9}$$

Generoivien funktioiden avulla nähdään, että kyseinen X:n konjugaattijakauma on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla $(\lambda M_Z(t_a), S_{t_a})$, missä M_Z on yksittäisen vahingon suuruuden momentit generoiva funktio ja S_{t_a} on S:n konjugaattijakauma parametrilla t_a.

Todennäköisyyden (6.3.3.8) estimointi toteutetaan yhteenvetona seuraavasti.

1) Määrätään t_a ehdosta (6.3.3.9).

2) Selvitetään X:n konjugaattijakauma parametrilla t_a ts. määrätään $\lambda M_Z(t_a)$ ja konjugaattijakauma S_{t_a}.

3) Tuotetaan havainto X_i kohdan kaksi konjugaattijakaumasta lauseen 6.3.1.1 jälkeen esitetyllä menetelmällä. Olkoon

$$Y_i = e^{-t_a X_i + c_X(t_a)} \mathbb{1}(X_i \geq (1+a)\mu_X)$$

(μ_X on X:n odotusarvo alkuperäisen jakauman suhteen). Asetetaan

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} Y_j, \quad \hat{\eta}_i = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} Y_j^2 \text{ ja } \hat{p}_i = \frac{\sqrt{\hat{\eta}_i - \hat{\alpha}_i^2}}{\hat{\alpha}_i \sqrt{i}}.$$

4) Toistetaan kohtaa 3) , kunnes $\hat{p}_i \leq p_0$, missä p_0 on ennalta annettu.

6.4 Ylärajaestimaatti häntätodennäköisyyksille

Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Oletetaan, että $\mu_\xi \in (0, \infty)$. Olkoon $a > 0$. Johdetaan yläraja-arvio todennäköisyydelle

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right).$$

Merkitään c_ξ:llä ξ:n kumulantit generoivaa funktiota kuten aiemminkin.

Lause 6.4.1. Olkoon $a > 0$ mielivaltainen. Silloin

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right) \leq e^{-nc_\xi^*((1+a)\mu_\xi)}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Todistus. Olkoon $s \geq 0$ mielivaltainen. Tsebysevin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} e^{nc_\xi(s)} &= \mathbb{E}\left(e^{sS_n}\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left(e^{sS_n}\mathbb{1}(S_n/n \geq (1+a)\mu_\xi)\right) \\ &\geq e^{sn(1+a)\mu_\xi}\,\mathbb{P}(S_n/n \geq (1+a)\mu_\xi). \end{aligned}$$

Valitsemalla paras $s \geq 0$ saadaan

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right) \leq e^{-n\sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s)\,|\,s\geq 0\}}.$$

Lause on todistettu, jos voidaan näyttää, että

$$\sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \geq 0\} = \sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Viimeinen supremum on nimittäin juuri $c_\xi^*((1+a)\mu_\xi)$. Lemman 6.3.3.1 nojalla

$$0 = c_\xi^*(\mu_\xi) = \sup\{s\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Koska $a > 0$, on

$$\sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \leq 0\} \leq \sup\{s\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \leq 0\} \leq 0.$$

Toisaalta

$$\sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \geq 0\} \geq 0 \cdot (1+a)\mu_\xi - c_\xi(0) = 0,$$

joten

$$\sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \geq 0\} = \sup\{s(1+a)\mu_\xi - c_\xi(s) \mid s \in \mathbb{R}\}. \square$$

Raja-arvosta (6.3.3.6) nähdään, että lauseen 6.4.1 eksponentti $c_\xi^*((1+a)\mu_\xi)$ on paras mahdollinen. Toisin sanoen jos $\beta > c_\xi^*((1+a)\mu_\xi)$, niin

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq (1+a)\mu_\xi\right) > e^{-n\beta}$$

jostain n:n arvosta lähtien.

6.5 Riippuvuuden mallintamisesta

Vakuutuslajien tai -yhtiöiden vahinkojen lukumäärät, kokonaisvahinkomäärät ja vahinkojen suuruudet mallinnetaan usein riippumattomiksi satunnaismuuttujiksi ainakin ensimmäisenä approksimaationa. Riippuvuutta voi kuitenkin syntyä vaikkapa yhteisten ympäristötekijöiden välityksellä. Hyvä esimerkki tästä on sään vaikutus vahinkojen lukumääriin.

Riippuvuutta sallitiin jossain määrin kohdan 6.2 fuusiotarkasteluissa. Normaaliapproksimaatioon perustuva alkupääomavaatimus fuusiossa syntyvälle yhtiölle oli

$$U_0 = y_\epsilon\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12}} - v_1\mu_1 - v_2\mu_2,$$

missä σ_i on yhtiön i kokonaisvahinkomäärän hajonta ja $v_i\mu_i$ (euromääräinen) varmuuslisä, $i = 1, 2$. Parametri σ_{12} kuvaa kokonaisvahinkomäärien riippuvuutta. Perusmallissa nämä ovat riippumattomia, jolloin $\sigma_{12} = 0$. Usein kokonaisvahinkomäärät ovat positiivisesti korreloituneita, jolloin $\sigma_{12} > 0$. Tällöin riski ja sen myötä alkupääomavaatimus on suurempi kuin perusmallissa. Voidaan myös sanoa, että riippuvuus kutistaa hajautuksesta syntyvää hyötyä.

6.5.1 Sekoitusmallit

Okoot X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia ja F_i muuttujan X_i kertymäfunktio, $i = 1, 2$. Eräs tapa mallintaa riippuvuutta on käyttää sekoitusmuuttujaa θ (tai sekoitusvektoria). Muuttujat X_1 ja X_2 tulevat olemaan riippumattomia vain ehdollisesti. Olkoon F_θ sekoitusmuuttujan kertymäfunktio. Asetetaan

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x_1|y)F_{X_2}(x_2|y)dF_\theta(y),$$

missä $\{F_i(\cdot|y)|y \in \mathbb{R}\}$ on X_i:n säännöllinen ehdollinen kertymäfunktio θ:n suhteen. Tulomuoto integrandissa merkitsee juuri muuttujien X_1 ja X_2 ehdollista riippumattomuutta ehdolla θ.

Malli on epäilemättä hyödyllinen varsinkin, jos θ on tulkinnallinen. Esimerkiksi riippuvuus vakuutuslajien vahinkojen lukumäärien välillä voisi olla ainakin osaksi kuvattavissa struktuurimuuttujien avulla. Pitkän aikavälin tarkasteluissa taas inflaatio aiheuttaa usein riippuvuutta vahinkojen suuruuksissa vakuutuslajien välillä. Ehdollistamalla inflaation suhteen saatettaisiin päästä ainakin lähelle edellä esitettyä mallia.

6.5.2 Copulat riippuvuuden kuvaajina

Tarvetta on tarkastella riippuvuutta edellistä kohtaa yleisemminkin. Okoon annettuna kaksi satunnaismuuttujaa X_1 ja X_2 sekä näiden kertymäfunktiot F_{X_1} ja F_{X_2}. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että F_{X_1} ja F_{X_2} ovat jatkuvia. Olkoon edelleen $F_{(X_1,X_2)}$ muuttujien yhteiskertymäfunktio,

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Kaksiulotteinen *copula* on kuvaus $C : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, joka täyttää seuraavat ehdot (i) - (iii).

(i) $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$.
(ii) $C(u_1, 1) = u_1,\ C(1, u_2) = u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$.
(iii) $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0, \quad \forall u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$.

Lause 6.5.1 (Sklarin lause) Olkoot X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktiot F_{X_1} ja F_{X_2} ovat jatkuvia ja joiden yhteiskertymäfunktio on $F_{(X_1,X_2)}$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen copula C, jolle

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \tag{6.5.1}$$

kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Lisäksi C määräytyy ehdosta

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) \leq u_2), \quad u_1, u_2 \in [0, 1]. \tag{6.5.2}$$

Lauseen nojalla kaikki annetut reunajakaumat omaavat kaksiulotteiset jakaumat saadaan copulan avulla. Komponenttien riippuvuus määräytyy copulasta.

Kutsutaan jatkossa lauseen 6.5.1 C:tä parin (X_1, X_2) copulaksi. Lauseen todistuksessa hyödynnetään seuraavaa lemmaa.

Lemma 6.5.1. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio F on jatkuva. Merkitään

$$F^{-1}(u) = \inf\{x | F(x) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Silloin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $u \in (0, 1)$,

(i) $F(F^{-1}(u)) = u$.
(ii) $\{X \leq x\} \subseteq \{F(X) \leq F(x)\}, \qquad \mathbb{P}(\{F(X) \leq F(x)\} \setminus \{X \leq x\}) = 0$.
(iii) $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F(X) \leq F(x)), \quad \mathbb{P}(F(X) \leq u) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u))$.
(iv) $F(X)$ on T(0,1)-jakautunut.

Todistus. Kohta (i) seuraa F:n jatkuvuudesta. Kohtien (ii) ja (iii) todistamiseksi riittää tarkastella tapausta $F(x) \in (0, 1)$. Selvästi $\{X \leq x\} \subseteq \{F(X) \leq F(x)\}$ ja

$$\{F(X) \leq F(x)\} = \{X \leq F^{-1}(F(x))\} \cup \{X \in (F^{-1}(F(x)), y]\},$$

missä $y = y(x) = \sup\{z | F(z) \leq F(x)\}$. Ilmeisesti $F(y) = F(x)$, joten

$$\mathbb{P}(X \in (F^{-1}(F(x)), y]) = F(y) - F(F^{-1}(F(x)) = 0.$$

Selvästi $F^{-1}(F(x)) \leq x$, joten $\mathbb{P}(X \in (x, y]) = 0$. Kohta (ii) on todistettu. Kohdan (iii) ensimmäinen väite seuraa kohdasta (ii). Edelleen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F(X) \leq u) &= \mathbb{P}(F(X) \leq F(F^{-1}(u))) \\
&= \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(u)) \\
&= F(F^{-1}(u)) = u.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa kohdan (iii) toisen väitteen ja kohdan (iv). □

Lauseen 6.5.1 todistus. Selvää on, että kaavan (6.5.2) mukainen funktio C täyttää copulalle asetetut vaatimukset (i) ja (ii). Jos $u_1 \leq v_1$ ja $u_2 \leq v_2$, niin

$$\mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \in (u_1, v_1], F_{X_2}(X_2) \in (u_2, v_2]) \geq 0.$$

Tästä nähdään, että myös vaatimus (iii) on täytetty.

Olkoon $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Lemman 6.5.1 nojalla

$$\begin{aligned} F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(X_2) \leq F_{X_2}(x_2)) \\ &= C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)). \end{aligned}$$

Siis vaatimus (6.5.1) toteutuu.

Olkoon D jokin copula, jolle

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = D(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Jos $u_1, u_2 \in (0, 1)$, niin $F_{X_1}(x_1) = u_1$ ja $F_{X_2}(x_2) = u_2$ eräille $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Siispä

$$\begin{aligned} D(u_1, u_2) &= F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) \\ &= C(u_1, u_2). \end{aligned}$$

□

Copuloiden ominaisuuksia Copuloita on pystytty hyödyntämään esimerkiksi moniulotteisten jakaumien simuloinnissa. Tarkastellaan seuraavassa kuitenkin eräitä muita näkökulmia.

Lause 6.5.2 Olkoot X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktiot F_{X_1} ja F_{X_2} ovat jatkuvia. Olkoon C parin (X_1, X_2) copula ja g_1 ja g_2 jatkuvia funktioita.

(i) Jos g_1 ja g_2 ovat kasvavia, niin parin $(g_1(X_1), g_2(X_2))$ copula on C.

(ii) Jos g_1 ja g_2 ovat aidosti väheneviä, niin parin $(g_1(X_1), g_2(X_2))$ copula on $\overline{C}$,

$$\overline{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1, \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1].$$

Todistus. Olkoot g_1 ja g_2 ja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Merkitään

$$y_i = \sup\{x | g_i(x) \leq x_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Silloin

$$\{g_i(X_i) \le x_i\} = \{X_i \le y_i\},$$

joten

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(g_1(X_1) \le x_1, g_2(X_2) \le x_2) \\ = \; & \mathbb{P}(X_1 \le y_1, X_2 \le y_2) \\ = \; & C(F_{X_1}(y_1), F_{X_2}(y_2)) = C(F_{g_1(X_1)}(x_1), F_{g_2(X_2)}(x_2)). \end{aligned}$$

Tämä todistaa kohdan (i). Toisen väitteen todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Todettakoon, että muuttujien $g_1(X_1)$ ja $g_2(X_2)$ kertymäfunktiot eivät ole välttämättä jatkuvia. Kaavan (6.5.1) mukainen yhteys kuitenkin pätee, kun X_i korvataan $g(X_i)$:llä. C:n lisäksi voi kuitenkin olla muitakin copuloita, jotka antavat saman yhteyden.

Olkoon (X_1, X_2) annettu. Sovelluksissa on kiinnostavaa tarkastella muuttujien häntäriippuvuutta. Tätä kuvaa esimerkiksi raja-arvo

$$\lambda = \lim_{v \to 0+} \mathbb{P}(X_1 > \bar{F}_{X_1}^{-1}(v) | X_2 > \bar{F}_{X_2}^{-1}(v)),$$

missä $\bar{F}_{X_i}(x) = 1 - F_{X_i}(x)$ ja

$$\bar{F}_{X_i}^{-1}(v) = \inf\{x | \bar{F}_{X_i}(x) \le v\}, \quad i = 1, 2.$$

Lause 6.5.3 Oletetaan, että $\bar{F}_{X_i}(x) > 0$ kaikilla $x > 0$, $i = 1, 2$, ja olkoon C parin (X_1, X_2) copula. Jos lisäksi lauseen 6.5.1 oletukset on täytetty, niin

$$\lambda = \lim_{v \to 1-} \frac{1 - 2v + C(v, v)}{1 - v}.$$

Todistus. Lauseen 6.5.2 nojalla

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_1 > \bar{F}_{X_1}^{-1}(v), X_2 > \bar{F}_{X_2}^{-1}(v)) \\ = \; & \mathbb{P}(\bar{F}_{X_1}(X_1) \le v, \bar{F}_{X_2}(X_2) \le v) \\ = \; & C(1 - v, 1 - v) + 2v - 1. \end{aligned}$$

Lauseen väite seuraa tästä. □

Esimerkkejä Havainnollistetaan teoriaa muutamalla esimerkillä. Kolme ensimmäistä ovat kiinnostavia yleisestä näkökulmasta. Kaksi viimeistä esimerkkiä käsittelevät parametrisoituja copula-perheitä. Esimerkiksi estimoinnissa perheestä voidaan valita sopivin aineiston perusteella.

Esimerkki 6.5.1. (Riippumattomuus-copula C_I.) Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia. Siis

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2),$$

joten

$$C_I(u_1,u_2) = u_1u_2.$$

Esimerkki 6.5.2. (Frechet'n yläraja-copula C_U.) Olkoon $X_1 = X_2$, jolloin

$$\begin{aligned} F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_1 \le x_2) \\ &= \min(F_{X_1}(x_1), F_{X_1}(x_2)). \end{aligned}$$

Siis

$$C_U(u_1,u_2) = \min(u_1,u_2).$$

Voidaan osoittaa, että mielivaltaiselle copulalle C,

$$C(u_1,u_2) \le C_U(u_1,u_2), \quad \forall u_1,u_2, \in [0,1].$$

Esimerkki 6.5.3. (Frechet'n alaraja-copula C_L.) Olkoon $X_1 = -X_2$, jolloin

$$F_{X_2}(x_2) = 1 - F_{X_1}(-x_2).$$

Siis

$$\begin{aligned} F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \le x_1, -X_1 \le x_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \in [-x_2,x_1]) = \max(0, F_{X_1}(x_1) - F_{X_1}(-x_2)) \end{aligned}$$

ja

$$C_L(u_1,u_2) = \max(0, u_1 + u_2 - 1).$$

Voidaan osoittaa, että mielivaltaiselle copulalle C,

$$C_L(u_1,u_2) \le C(u_1,u_2), \quad \forall u_1,u_2, \in [0,1].$$

Esimerkki 6.5.4. (Claytonin copula.) Olkoon $\alpha > 0$. Määritelmä on

$$C(u_1,u_2) = \max\left(0, (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}\right).$$

Esimerkki 6.5.5. (Gaussinen copula). Määritelmä on

$$C(u_1,u_2) = H_\alpha\left(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)\right),$$

missä ϕ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio ja H_α 2-ulotteisen normaalijakauman kertymäfunktio kovarianssina α (reunajakaumat noudattavat standardi normaalijakaumaa). Siis

$$H_\alpha(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{t_1^2 - 2\alpha t_1 t_2 + t_2^2}{2(1-\alpha^2)}} dt_1 dt_2.$$

Copula tuottaa kaksiulotteisen normaalijakauman kovarianssina α.

Lähde kohtaan 6.5: Denuit et al. (2005).

7 Jälleenvakuutussuojista

Tavallisesti vakuutusyhtiö ei pidä koko vahinkoriskiä omalla vastuullaan, vaan ottaa toiselta vakuutusyhtiöltä vakuutuksen sopivalle vakuutuskannan osalle. Tällöin on kyse *jälleenvakuutuksesta* (myös puhutaan edelleenvakuutuksesta). Periaatteessa kyse on tavallisesta vakuutustarpeesta: alkuperäinen vakuuttaja eli *ensivakuuttaja* arvioi riskit suuriksi voimavaroihinsa nähden ja haluaa suojautua ottamalla vakuutuksen *jälleenvakuuttajalta*. Tällä on vaikutusta esimerkiksi yhtiön vararikkotodennäköisyyksiin. Nämä nimittäin arvioidaan yleensä käyttäen perustana omalla vastuulla olevaa osuutta kokonaisvahinkomäärästä. Samoin tietysti vakuutusmaksuista vähennetään *jälleenvakuutusmaksut* eli maksut, jotka ensivakuuttaja joutuu sopimuksesta maksamaan.

Kuvatkoot X ja Z yleisesti alkuperäistä ensivakuuttajan kokonaisvahinkomäärää ja yksittäisen vahingon suuruutta. Jaetaan X osiin

$$X = X^{ov} + X^{jv},$$

missä X^{ov} ja X^{jv} ovat jälleenvakuutusjärjestelyssä syntyvät kokonaisvahinkomäärät,

$$X^{ov} = \text{ ensivakuuttajan osuus kokonaisvahinkomäärästä}$$

ja

$$X^{jv} = \text{ jälleenvakuuttajan osuus kokonaisvahinkomäärästä.}$$

Joissain sopimustyypeissä yksittäiset vahingot jaetaan ensi- ja jälleenvakuuttajan kesken. Tällöin merkitään

$$Z = Z^{ov} + Z^{jv},$$

missä

$$Z^{ov} = \text{ ensivakuuttajan osuus vahingon suuruudesta}$$

ja

$$Z^{jv} = \text{ jälleenvakuuttajan osuus vahingon suuruudesta.}$$

Kiinnostuksen kohteena jatkossa on lähinnä osuuksien X^{ov} ja X^{jv} selvittäminen, kun X ja jälleenvakuutuslaji on annettu. *Ensivakuuttajan riskimaksu* on $\mathbb{E}(X^{ov})$ ja *jälleenvakuuttajan riskimaksu* $\mathbb{E}(X^{jv})$. Samoin on luontevaa puhua ensi- ja jälleenvakuuttajan osuudesta vakuutusmaksuista. Tarkastellaan seuraavassa neljää yleisesti esiintyvää jälleenvakuutuslajia.

7.1 Excess of loss (XL)

Excess of loss -jälleenvakuutuksessa kukin yksittäinen vahinko jaetaan ensi- ja jälleenvakuuttajan kesken. Jälleenvakuutuslajista käytetään lyhennystä XL. Vastaava suomenkielinen termi on yksittäisylivahinkojälleenvakuutus.

Jälleenvakuutussopimuksessa määritellään *omavastuuraja* eli *XL-raja* $M > 0$, joka on suurin ensivakuuttajan vastuulle jäävä yksittäisen vahingon suuruus. Osuudet ovat

$$Z^{ov} = \min(Z, M)$$

ja

$$Z^{jv} = Z - Z^{ov}.$$

Menettely antaa suojan yksittäisiä suurvahinkoja vastaan, mutta ei poikkeuksellisen suurta vahinkojen lukumäärää vastaan.

Olkoon Z:n kertymäfunktio S. Tällöin Z^{ov}:n kertymäfunktio S^{ov} on

$$S^{ov}(z) = \begin{cases} S(z), & \text{jos } z < M \\ 1, & \text{jos } z \geq M. \end{cases}$$

Olkoon $a_j^{ov}(M) = E\left((Z^{ov})^j\right)$, $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin

$$a_j^{ov}(M) = \int_{[0,\infty)} z^j dS^{ov}(z) = \int_{[0,M]} z^j dS(z) + M^j(1 - S(M)).$$

Jälleenvakuuttajan vastaava momentti olkoon $a_j^{jv}(M) = E\left((Z^{jv})^j\right)$. Odotusarvo on

$$\begin{aligned} a_1^{jv}(M) = a_1 - a_1^{ov}(M) &= \int_{[0,\infty)} zdS(z) - \int_{[0,M]} zdS(z) - M(1 - S(M)) \\ &= \int_{(M,\infty)} zdS(z) - M(1 - S(M)). \end{aligned}$$

Jos X on yhdistetty muuttuja ja λ vahinkojen lukumäärän odotusarvo, niin

$$\mathbb{E}(X^{ov}) = \lambda a_1^{ov}(M)$$

ja

$$\mathbb{E}(X^{jv}) = \lambda a_1^{jv}(M).$$

Euromääräinen raja M aiheuttaa tarpeen vuosittaisiin tarkistuksiin esimerkiksi inflaation takia. Oletetaan, että kaikki yksittäiset vahingot kasvavat samassa suhteessa ts. tarkastellaan Z:n sijasta muuttujaa $Z' = (1 + i)Z$, missä $i > 0$ kuvaa inflaatioastetta. Luonnollinen muutos omavastuurajaan on korottaa myös sitä samassa suhteessa. Olkoon siis $M' = (1+i)M$ uusi raja. Jälleenvakuuttajan kannalta on tarpeen tietää, miten riskimaksu muuttuu. Selvästi

$$E(Z') = (1 + i)a_1$$

ja

$$E(\min(Z', M')) = (1 + i)a_1^{ov}(M).$$

Näin ollen jälleenvakuuttajan uusi vahingon suuruuden odotusarvo on

$$\mathbb{E}(Z') - \mathbb{E}(\min(Z', M')) = (1+i)a_1^{jv}(M).$$

Jälleenvakuuttajan riskimaksuun tulee siis myös inflaatiokerrointa $1+i$ vastaava korotus. Myös nähdään, että pelkkä jälleenvakuutusmaksun nostaminen inflaatiota vastaten ei riitä kattamaan vahinkomäärän nousua, vaan korotus on tehtävä lisäksi rajaan M. Jos kuitenkaan rajaa ei muuteta, on maksua nostettava enemmän kuin inflaatioaste edellyttäisi.

Olkoon nyt X yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S) ja $Z_1, Z_2, \ldots$ yksittäisten vahinkojen suuruudet. Tällöin jälleenvakuuttajan osuus on

$$X^{jv} = \sum_{i=1}^{K} Z_i^{jv} = \sum_{i=1}^{K} (Z_i - M)\mathbb{1}(Z_i > M).$$

Selvää on, että X^{jv} on yhdistetty muuttuja parametrilla (K, S^{jv}). Jälleenvakuuttajan kannalta tämä ei välttämättä ole hödyllinen tieto. Esityksessä on runsaasti nollia, jotka eivät ole kiinnostavia ja joista jälleenvakuuttaja ei yleensä saa tietoa. Pyritään johtamaan X^{jv}:lle esitys, jossa otetaan huomioon vain rajan M ylittävät vahingot.

Olkoon $\tau_0 = 0$ ja

$$\tau_i = \inf\{k > \tau_{i-1} \mid Z_k > M\},$$

$i = 1, 2, \ldots$. Merkitään vielä $\varrho_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ja

$$\bar{Z}_i = Z_{\tau_i} - M.$$

Olkoon

$$\bar{K} = \sup\{i \mid \tau_i \leq K\} = \#\{i \leq K \mid Z_i > M\}.$$

Tällöin $\bar{K}$ ilmaisee jälleenvakuuttajalle korvauksia aiheuttavien vahinkojen lukumäärän. Vastaavasti kokonaisvahinkomäärä on

$$X^{jv} = \bar{Z}_1 + \cdots + \bar{Z}_{\bar{K}}. \tag{7.1.1}$$

Oletetaan, että $S(M) \in (0, 1)$. Olkoon $\bar{S}$ kertymäfunktio, joka määräytyy ehdosta

$$\bar{S}(z) = \frac{S(M+z) - S(M)}{1 - S(M)}, \quad z \geq 0.$$

Tämä vastaa ylitteiden $Z_i - M$ ehdollista jakaumaa ehdolla $Z_i > M$. Merkitään

$$p = 1 - S(M).$$

Lause 7.1.1. Lukumäärämuuttujan $\bar{K}$ säännöllinen ehdollinen jakauma ehdolla $K = h$ on binomijakauma parametrilla (h, p). Toisin sanoen

$$\mathbb{P}(\bar{K} = k | K = h) = \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots, \ k = 0, 1, \ldots, h. \qquad (7.1.1.1)$$

Edelleen

$$\mathbb{P}(\bar{K} = k) = \sum_{h=k}^{\infty} \mathbb{P}(K = h) \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

ja $\mathbb{E}(\bar{K}) = p\,\mathbb{E}(K)$. Muuttujat $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja yhteinen kertymäfunktio on $\bar{S}$. Kokonaisvahinkomäärä X^{jv} on yhdistetty muuttuja parametrilla $(\bar{K}, \bar{S})$.

Todistus. Olkoon $h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $k \leq h$. Silloin

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\bar{K} = k, K = h) \\ = \ & \mathbb{P}(K = h, \text{ tasan } k \text{ sattuneista vahingoista on suurempia kuin } M) \\ = \ & \mathbb{P}(K = h) \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k}. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen (7.1.1.1), josta myös esitys todennäköisyydelle $\mathbb{P}(\bar{K} = k)$ välittömästi seuraa. Edelleen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{K}) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbb{P}(\bar{K} = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{h=k}^{\infty} \mathbb{P}(K = h) \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(K = h) \sum_{k=0}^{h} k \binom{h}{k} p^k (1-p)^{h-k} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(K = h)\, ph = p\, \mathbb{E}(K). \end{aligned}$$

Tarkastellaan nyt muuttujia $\bar{Z}_i$. Selvästi

$$\mathbb{P}(\tau_1 = k) = \mathbb{P}(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k-1} \leq M, Z_k > M) = (1-p)^{k-1} p,$$

$k = 1, 2, \ldots$. Nähdään, että

$$\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 = k) = 1.$$

Siis τ_1 on todella satunnaismuuttuja. Samaan tapaan nähdään, että $\mathbb{P}(\tau_i < \infty) = 1$ kaikilla $i \geq 1$ ja että $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakutuneita satunnaismuuttujia. Olkoon $z_1 \geq 0$. Tällöin

$$\mathbb{P}(\bar{Z}_1 \leq z_1) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varrho_1 = k_1, \bar{Z}_1 \leq z_1) \tag{7.1.2}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k_1-1} \leq M, Z_{k_1} \in (M, M+z_1]).$$

Koska Z-muuttujat ovat riippumattomia, niin kukin summattava voidaan esittää muodossa

$$\frac{\mathbb{P}(Z_{k_1} \in (M, M+z_1])}{\mathbb{P}(Z_{k_1} > M)} \mathbb{P}(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k_1-1} \leq M, Z_{k_1} > M)$$

$$= \bar{S}(z_1)\, \mathbb{P}(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k_1-1} \leq M, Z_{k_1} > M).$$

Siis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{Z}_1 \leq z_1) &= \bar{S}(z_1) \sum_{k_1=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k_1-1} \leq M, Z_{k_1} > M) \\ &= \bar{S}(z_1) \sum_{k_1=1}^{\infty} \mathbb{P}(\varrho_1 = k_1) = \bar{S}(z_1). \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \ldots$ ovat $\bar{S}$-jakautuneita ja että $\bar{Z}$-muuttujat ovat riippumattomia.

Osoitetaan, että X^{jv} on yhdistetty muuttuja lauseen mukaisella parametrilla. Olkoot $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$. On todistettava, että

$$\mathbb{P}(\bar{K} = k, \bar{Z}_1 \leq z_1, \ldots, \bar{Z}_m \leq z_m) = \mathbb{P}(\bar{K} = k)\bar{S}(z_1) \cdots \bar{S}(z_m).$$

Riittää todistaa väite tapauksessa $m \geq k$. Vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{h=k}^{\infty} \mathbb{P}(K = h, \varrho_1 + \cdots + \varrho_k \leq h, \varrho_1 + \cdots + \varrho_{k+1} > h, \bar{Z}_1 \leq z_1, \ldots, \bar{Z}_m \leq z_m). \tag{7.1.3}$$

Kuten (7.1.2):ssa nähdään, että ϱ- ja $\bar{Z}$-muuttujia koskevat vaatimukset määräytyvät alkuperäisten Z-muuttujien avulla, joten vaatimus $K = h$ on riippumaton näistä. Siis (7.1.3) on

$$\sum_{h=k}^{\infty} \mathbb{P}(K = h)\, \mathbb{P}(\varrho_1 + \cdots + \varrho_k \leq h, \varrho_1 + \cdots + \varrho_{k+1} > h, \bar{Z}_1 \leq z_1, \ldots, \bar{Z}_m \leq z_m). \tag{7.1.4}$$

Olkoot $h_1, \ldots, h_{m+1}$ sellaisia, että $h_1+\cdots+h_k \le h$ ja $h_1+\cdots+h_{k+1} > h$. Kuten (7.1.2):ssa saadaan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\varrho_1 = h_1, \ldots, \varrho_{m+1} = h_{m+1}, \bar{Z}_1 \le z_1, \ldots, \bar{Z}_m \le z_m)\\ &= \bar{S}(z_1)\cdots\bar{S}(z_m)\mathbb{P}(\varrho_1 = h_1, \ldots, \varrho_{m+1} = h_{m+1}).\end{aligned}$$

Osittamalla (7.1.4):n jälkimmäinen todennäköisyys tällaisten summaksi saadaan (7.1.4) muotoon

$$\bar{S}(z_1)\cdots\bar{S}(z_m)\sum_{h=k}^{\infty}\mathbb{P}(K=h)\,\mathbb{P}(\varrho_1+\cdots+\varrho_k \le h, \varrho_1+\cdots+\varrho_{k+1} > h)$$

$$= \bar{S}(z_1)\cdots\bar{S}(z_m)\,\mathbb{P}(\bar{K}=k). \square$$

Seuraus 7.1.2. Noudattakoon X yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla (λ, Q, S). Silloin X^{jv} on yhdistetty painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda p, Q, \bar{S})$.

Todistus. Lauseen 7.1.1 nojalla riittää näyttää, että muuttujalla $\bar{K}$ on painotettu Poisson-jakauma parametrilla $(\lambda p, Q)$. Olkoon H Q:n kertymäfunktio. Lauseen 7.1.1 nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{K}=k) &= \sum_{h=k}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^h}{h!}\,dH(q)\binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k}\\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda q}\frac{(\lambda p q)^k}{k!}\sum_{h=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p)q)^{h-k}}{(h-k)!}\,dH(q)\\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda q}\frac{(\lambda p q)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)q}\,dH(q) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda p q}\frac{(\lambda p q)^k}{k!}\,dH(q). \square\end{aligned}$$

Esimerkki 7.1.1. Olkoon Z eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla b ts.

$$S(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = 1 - e^{-bz}, \quad z \ge 0.$$

Olkoon XL-raja M. Tällöin

$$\begin{aligned}a_1^{ov}(M) &= \int_0^M z\,dS(z) + M(1-S(M))\\ &= b^{-1} - e^{-bM}(M+b^{-1}) + Me^{-bM} = b^{-1}(1-e^{-bM})\end{aligned}$$

ja

$$a_1^{jv}(M) = a_1 - a_1^{ov}(M) = b^{-1}e^{-bM}.$$

Oletetaan, että X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S). Tällöin X^{jv}:llä on yhdistetty Poisson-jakauma parametrilla $(\lambda e^{-bM}, \bar{S})$, missä

$$\begin{aligned}\bar{S}(z) &= \frac{S(z+M)-S(M)}{1-S(M)} \\ &= \frac{e^{-bM}-e^{-b(z+M)}}{e^{-bM}} = 1-e^{-bz} = S(z), \quad z \geq 0.\end{aligned}$$

Siis myös jälleenvakuuttajan vahinkojen suuruudet ovat eksponentiaalisesti jakautuneita samalla parametrilla b.

7.2 Quota share (QS)

Quota share -jälleenvakuutuksessa vahingot jaetaan ensi- ja jälleenvakuuttajan kesken kiinteässä suhteessa. Suomenkielinen termi on osamääräjälleenvakuutus.

Sopimuksessa määritellään jakosuhde $r \in (0,1)$ ja asetetaan

$$\begin{aligned}Z^{ov} &= rZ, \\ Z^{jv} &= (1-r)Z.\end{aligned}$$

Voitaisiin tietysti jakaa myös suoraan kokonaisvahinkomäärä. Olkoon S alkuperäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio. Sopimuksen jälkeiset kertymäfunktiot ovat

$$\begin{aligned}S^{ov}(z) &= \mathbb{P}(Z^{ov} \leq z) = S(z/r), \\ S^{jv}(z) &= \mathbb{P}(Z^{jv} \leq z) = S(z/(1-r))\end{aligned}$$

alueessa $z \geq 0$.

Quota share on yksinkertaisempi kuin XL esimerkiksi jälleenvakuutusmaksujen määräämisessä. Ongelmana voidaan pitää sitä, että pienetkin vahingot menevät jälleenvakuutuksen piiriin.

Olkoon nyt yhtiön i kokonaisvahinkomäärä $X_i, i = 1, 2$. Tarkastellaan ns. *riskinvaihtoa*, jossa yhtiöt vastaavat yhteisesti summasta $X_1 + X_2$ erikseen sovittavalla tavalla. Olkoot Y_1 ja Y_2 sopimuksessa syntyvät kokonaisvahinkomäärät. Kysytään optimaalista tapaa suorittaa kyseinen riskinvaihto. Optimaalisuutta mitataan seuraavassa kokonaisvahinkomäärien variansseilla.

Lause 7.2.1. Oletetaan, että $\sigma_{X_i} \in (0, \infty), i = 1, 2$. Merkitään $X = X_1 + X_2$. Olkoot $c \in [0, 1]$ ja Y_1 ja Y_2 sellaisia, että

$$X = Y_1 + Y_2 \quad \text{ja} \quad \sigma_{Y_1} = c\sigma_X.$$

Silloin $\sigma_{Y_2} \geq (1-c)\sigma_X$. Jos toisaalta $Y_1^* = cX$ ja $Y_2^* = (1-c)X$, niin

$$\sigma_{Y_1^*} = c\sigma_X \quad \text{ja} \quad \sigma_{Y_2^*} = (1-c)\sigma_X.$$

Lause antaa seuraavan optimaalisuusominaisuuden quota share -jälleenvakuutukselle. Olkoot Y_1 ja Y_2 (ehdokas)riskinvaihdossa syntyneet kokonaisvahinkomäärät ja

$$\sigma_{Y_i} \leq \sigma_X \in (0, \infty), \quad i = 1, 2.$$

Silloin on olemassa keskinäinen quota share -jälleenvakuutusmenettely, joka on varianssilla mitattuna kummallekin osapuolelle vähintään yhtä hyvä kuin mainittu ehdokasvaihto. QS antaa tämän nojalla *Pareto-optimaalisia* riskinvaihtoja: jos $c \in [0,1], Y_1 = cX$ ja $Y_2 = (1-c)X$, niin ei ole olemassa sellaista riskinvaihtoa, joka parantaisi kummankin osapuolen asemaa (ja ainakin toisen aidosti).

Lauseen 7.2.1 todistus. Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\sigma_{Y_2}^2 &= \sigma_{X-Y_1}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))\,(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1))\} \\
&\geq \sigma_X^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2\sqrt{\mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}(X))^2\}\,\mathbb{E}\{(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1))^2\}} \\
&= \sigma_X^2 + \sigma_{Y_1}^2 - 2\sigma_X\sigma_{Y_1} = (1-c)^2\sigma_X^2.
\end{aligned}$$

Tämä todistaa ensimmäisen väitteen. Toinen väite on ilmeinen. □

7.3 Surplus

Surplus -jälleenvakuutus on eräänlainen muunnos quota share -rakenteesta, jossa kuitenkin osa pienistä vahingoista jää jälleenvakuutuksen ulkopuolelle. Suomenkielinen termi on ylitejälleenvakuutus.

Järjestelmässä jokaiselle vakuutetulle i määrätään yläraja L_i, jota vahingon suuruus ei voi ylittää. Tämä voisi olla esimerkiksi sopimuksen mukainen vakuutusmäärä tai EML (estimated maximum loss). Lisäksi sopimukseen sisällytetään maksimaalinen ensivakuuttajan vastuulle jäävä korvaus vahingosta. Olkoon tämä M. Jos $L_i \leq M$, ei jälleenvakuuttaja maksa mitään. Jos $L_i > M$, maksaa ensivakuuttaja määrän $r(L_i)Z$ ja jälleenvakuuttaja loput (kuten QS:ssä). Tässä siis $r(L_i)$ riippuu vakuutetusta ja on järjestelmässä $r(L_i) = M/L_i$. Täsmällisemmin, jos vahinko sattuu vakuutetulle i, niin

$$\begin{aligned}
Z^{ov} &= r(L_i)Z, \\
r(L_i) &= \min(1, M/L_i).
\end{aligned}$$

Järjestelyn matemaattisen hallinnoimisen näkökulmasta sopiva oletus voisi olla, että saman ylärajan L omaavat vakuutetut ovat samankaltaisia. Toisin sanoen vahingon suuruusjakauma on vakuutetusta riippumaton saman rajan omaavilla vakuutetuilla. Lisäksi tarvitaan malli sattuneen vahingon todennäköisyydelle vastata eri L:n arvoja. Olkoon

$$S(z|L) = \mathbb{P}(Z \leq z|L), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Siis $S(\cdot|L)$ on vahingon suuruuden kertymäfunktio, kun maksimivahinko on L. Tällöin koko kantaa kuvaava vahingon suuruuden kertymäfunktio S määräytyy ehdosta

$$S(z) = \int_{[0,\infty)} S(z|L)\, dG(L),$$

missä

$$G(L) = \mathbb{P}(\text{vahinkoon liittyvän vakuutetun maksimivahinko on korkeintaan } L).$$

Ensivakuuttajan vahingon suuruuden kertymäfunktio määräytyy ehdosta

$$S^{ov}(z) = \int_{[0,\infty)} S(z/r(L)|L)\, dG(L), \quad z \in \mathbb{R}.$$

7.4 Stop loss (SL)

Stop loss -jälleenvakuutuksessa kokonaisvahinkomäärä jaetaan siten, että ensivakuuttaja pitää omalla vastuullaan sovitun euromäärän ja loput jäävät jälleenvakuuttajalle. Suomenkielinen termi on kokonaisylivahinkojälleenvakuutus.

Sopimuksessa määritellään *omavastuuraja* eli *SL-raja* $M > 0$, joka on suurin ensivakuuttajan vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä. Jos X on alkuperäinen kokonaisvahinkomäärä, niin ensivakuuttajan osuus on

$$X^{ov} = \min(X, M).$$

Järjestely suojaa sekä yksittäisiltä suurvahingoilta että poikkeuksellisen suurelta vahinkojen lukumäärältä. Jälleenvakuuttajan riskimaksu on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^{jv}\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X^{jv} > x)dx \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > M + x)dx.\end{aligned}$$

Ajatellaan nyt, että yhtiö pitää omalla vastuullaan odotusarvotasolla määrän P liikkeestään. Toisin sanoen jos Y on ensivakuuttajan osuus kokonaisvahinkomäärästä niin $\mathbb{E}(Y) = P$. Seuraavan lauseen nojalla yhtiön kannattaa tehdä tästä lähtökohdasta SL-sopimus, kun tavoitteena on minimoida varianssi. Olkoon $R : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

$$R(M) = \mathbb{E}(\min(X, M)).$$

Siis $R(M)$ on ensivakuuttajan riskimaksu stop loss -rajalla M.

Lause 7.4.1. Olkoon X alkuperäinen yhtiön kokonaisvahinkomäärä ja Y jälleenvakuutuksen jälkeinen omalle vastuulle jäävä osuus. Oletetaan, että

$$0 \le Y \le X$$

ja että $\mathbb{E}(Y) = P < \mathbb{E}(X)$. Silloin funktio R on jatkuva ja $R(M) = P$ eräälle $M \in (0, \infty)$. Lisäksi pätee

$$\mathrm{Var}(X^{ov}) \le \mathrm{Var}(Y).$$

Lauseen todistus perustetaan seuraavaan yleishyödylliseen lemmaan.

Lemma 7.4.2. Olkoot X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ovat äärellisiä. Oletetaan, että $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$. Olkoon F_i muuttujan X_i kertymäfunktio, $i = 1, 2$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että

$$\begin{cases} F_1(x) \le F_2(x), & \text{jos } x < x_0, \\ F_1(x) \ge F_2(x), & \text{jos } x \ge x_0. \end{cases}$$

Olkoon $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Silloin

$$\mathbb{E}(h(X_1)) \le \mathbb{E}(h(X_2)). \tag{7.4.6}$$

Lemman todistus. Oletetaan aluksi, että $h(x_0) = 0$ ja että $h(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $y > 0$ mielivaltainen. Konveksisuuden nojalla voidaan valita sellaiset $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, että

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(h(X_1) > y) &= \mathbb{P}(X_1 < a) + \mathbb{P}(X_1 > b) \\ &= F_1(a-) + 1 - F_1(b) \\ &\le F_2(a-) + 1 - F_2(b) = \mathbb{P}(h(X_2) > y). \end{aligned}$$

Yleisesti ei-negatiivisen satunnaismuuttujan ξ odotusarvo on

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > y)\, dy.$$

Siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_1)) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(h(X_1) > y)\, dy \\ &\le \int_0^\infty \mathbb{P}(h(X_2) > y)\, dy = \mathbb{E}(h(X_2)). \end{aligned}$$

Olkoon nyt h yleinen lemman ehdot täyttävä funktio. Konveksisuuden nojalla voidaan määrätä sellainen $c \in \mathbb{R}$, että

$$h(x) \ge h(x_0) + c(x - x_0)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (voidaan valita esimerkiksi $c = h'(x_0+)$). Olkoon

$$r(x) = h(x) - h(x_0) - c(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alkuosan nojalla $\mathbb{E}(r(X_1)) \leq \mathbb{E}(r(X_2))$. Väite seuraa tästä, koska $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$. $\square$

Lauseen 7.4.1 todistus. Olkoon $M > 0$ ja $\Delta > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} |\, R(M+\Delta) - R(M)\, | &= \mathbb{E}(\min(X, M+\Delta) - \min(X, M)) \\ &= \mathbb{E}\left((X-M)\mathbb{1}(X \in (M, M+\Delta]) + \Delta\, \mathbb{P}(X > M+\Delta)\right. \\ &\leq \Delta\, \mathbb{P}(X > M). \end{aligned}$$

Nähdään, että R on jatkuva. Lisäksi $R(M) \to 0$, kun $M \to 0+$ ja $R(M) \to \mathbb{E}(X)$, kun $M \to \infty$. Siis vaadittu SL-raja on olemassa.

Optimaalisuuden todistamiseksi valitaan edellisessä lemmassa $X_1 = X^{ov}, X_2 = Y, x_0 = M$ ja $h(x) = (x - P)^2$. Olkoon $x < M$. Koska $Y \leq X$, niin

$$F_1(x) = \mathbb{P}(X^{ov} \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(Y \leq x) = F_2(x).$$

Toisaalta $F_1(M) = 1$, joten $F_2(x) \leq F_1(x)$ alueessa $x \geq M$. Selvästi h on konveksi, joten lemman nojalla (7.4.6) pätee, mikä on juuri lauseen väite. $\square$

8 Korvausvastuusta

Vakuutussopimukset ovat useimmiten sellaisia, että yhtiö sitoutuu korvaamaan ne vahingot, jotka *sattuvat* vakuutuksen voimassaoloaikana. Korvausvaatimukset tulevat toisinaan pitkänkin ajan kuluttua sattumisesta. Vaikka vaatimus olisikin esitetty, saattaa korvauksen suorittaminen viipyä asian vaatiman selvittelytyön takia. Samoin eläketyyppisissä korvauksissa suorituksia syntyy vaikkapa kuukausittain pitkään vahingon sattumisen jälkeen.

Sopimustensa perusteella yhtiö on velvollinen maksamaan tulevaisuudessa korvauksia jo sattuneista vahingoista. Näiden määrää kutsutaan *korvausvastuuksi* tai myös *korvausvastuuvelaksi*. Samaa termiä käytetään tilinpäätökseen kirjattavasta erästä, joka edustaa yleensä mainitun velan turvaavasti arvioitua odotusarvoa. Erä on usein huomattavan suuri.

Korvausvastuun tunteminen on tärkeää esimerkiksi vakavaraisuuden näkökulmasta. Yhtiön taloudellista asemaa kuvaa nimittäin luontevimmin varojen ja velkojen erotus. Velasta suuri osa on juuri vastuuvelkaa. Samoin vakuutusten hinnoittelussa on oleellista, että vakuutusmaksu mitoitetaan sopimuksen mukaisesti vastaamaan vakuutuksen voimassaoloaikana sattuvien vahinkojen korvausmääriä. Seurauksena tästä sattumisperiaatteesta on, että yhtiölle syntyy harjoittamastaan vakuutusliikkeestä sijoitettavia varoja. Nimittäin vakuutusmaksut tulevat yhtiöön ennen korvausten maksamista.

Seuraavassa korvausvastuulla tarkoitetaan velan todellista määrää, joka on luonteensa takia ajateltava satunnaismuuttujaksi. Tälle tullaan esittämään joukko estimaatteja, jotka vastaavat lähinnä velan odotusarvoa. Tarkastellaan aluksi muutamia esimerkkejä.

- Autovakuutus

Vahingot tulevat tavallisesti nopeasti yhtiön tietoon. Korvaus maksetaan esimerkiksi korjaamolta tulevan laskun perusteella lyhyehkön ajan kuluttua. Merkittävää korvausvastuuta ei synny.

- Lakisääteinen tapaturmavakuutus

Eräät ammattitaudit tulevat erittäin hitaasti tietoon, esimerkiksi kymmenien vuosien jälkeen kemikaalille altistumisesta. Korvaus maksetaan vakavissa tapaturmissa eläkkeenä niin kauan kuin vakuutettu elää. Korvausvastuu ylittää pitkään toimineissa yhtiöissä usein moninkertaisesti vuodessa maksettavat korvaukset.

- Tuleva XL-jälleenvakuutus

Jälleenvakuutusyhtiö saattaa saada tiedon vahingoista vasta siinä vaiheessa, kun XL-raja ylittyy. Vahinkojen tietoontulonopeus on siis erilainen kuin ensivakuuttajalla.

8.1 Selviämiskolmiot

Tarkastellaan seuraavaa tilastoryhmittelyä, ns. *selviämiskolmiota*:

$i \backslash j$	0	1	$\cdots$	$I-1$	I
0	C_{00}	C_{01}	$\cdots$	$C_{0,I-1}$	C_{0I}
1	C_{10}	C_{11}	$\cdots$	$C_{1,I-1}$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
$I-1$	$C_{I-1,0}$	$C_{I-1,1}$			
I	C_{I0}				

Kolmio kuvaa suoritettuja korvauksia vuoden I lopussa. Vasemmalla on lueteltu tarkasteltavat sattumisvuodet $i = 0, 1, \ldots, I$ ja ylhäällä suoritusvuodet $j = 0, 1, \ldots, I$ suhteessa sattumisvuoteen. Muuttuja C_{ij} tarkoittaa sitä korvausmäärää, joka on yhteensä maksettu sattumisvuoden i vahingoista vuosina $i, i+1, \ldots, i+j$. Vuoden I loppuun mennessä maksetut korvaukset saadaan sattumisvuosittain lävistäjältä

$$C_{I0}, C_{I-1,1}, \ldots, C_{1,I-1}, C_{0I}.$$

Korvausvastuun estimoinnissa on kyse selviämiskolmion täydentämisestä suorakaiteeksi lopullisten sattumisvuosittaisten korvausmäärien selvittämiseksi. Jos oletetaan, että kaikki korvaukset maksetaan viimeistään L:n vuoden kuluessa sattumishetkestä, niin tehtävänä on estimoida $C_{0L}, C_{1L}, \ldots, C_{IL}$. Korvausvastuu on näiden summa vähennettynä jo maksetuilla korvauksilla.

Usein ongelmaa tarkastellaan ainakin ensimmäisenä vaiheena odotusarvotasolla. Tehtävänä on siis estimoida korvausvastuun odotusarvo tai pikemminkin ehdollinen odotusarvo, kun havainnot C_{ij} on annettu. Seuraavassa tarkastellaan lähinnä odotusarvojen estimaatteja. Ongelmia estimointiin aiheuttaa usein tilastoaineiston suppeus (tai jopa puuttuminen). Korvausinflaation vaihtelut ja poikkeamat tulevasta inflaatiosta saattavat aiheuttaa harhaa estimaatteihin. Tästä voidaan selvitä puhdistamalla inflaatio aineistosta ja arvioimalla tuleva inflaatio erikseen. Muutokset korvausten selviämisnopeudessa ovat ehkä vielä vaikeammin hallittavissa.

8.2 Chain-Ladder -menetelmä

Olkoot $C_{ij}, i, j = 0, 1, \ldots, I$, satunnaismuuttujia, jotka kuvaavat sattumisvuoden i vahingoista vuoden $i + j$ loppuun mennessä maksettuja korvauksia. Otetaan lähtökohdaksi selviämiskolmio, joka siis sisältää näistä muuttujista jo havaitut. Oletetaan lisäksi, että kaikki korvaukset maksetaan I vuodessa vahingon sattumisesta (ts. $L \leq I$).

Chain-Ladder -menetelmässä lopulliset vahinkomäärät C_{iI} estimoidaan seuraavasti. Merkitään

$$\hat{m}_j = \frac{\left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{ij}\right)}{\left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}\right)}, \quad j = 1, \ldots, I.$$

Estimoidaan,

$$\hat{C}_{ir} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i+1}^{r} \hat{m}_k, \quad i = 0, 1, \ldots, I, \quad r \geq I - i + 1. \tag{8.2.1}$$

Lähdetään siis liikkeelle tuoreimmasta sattumisvuotta koskevasta havainnosta ja 'kehitetään' tätä aiempien sattumisvuosien havaintojen perusteella. Sattumisvuoden i korvausvastuun *Chain-Ladder -estimaatti* on

$$\hat{U}_i = \hat{C}_{iI} - C_{i,I-i}$$

ja koko korvausvastuun estimaatti vuoden I lopussa

$$\hat{U} = \sum_{i=0}^{I} \hat{U}_i.$$

Menetelmän taustaksi on luontevaa ajatella seuraava malli (Mack (1993)):

1) On olemassa sellaiset vakiot m_j, että

$$\mathbb{E}\left(C_{ij} \mid C_{i0}, \ldots, C_{i,j-1}\right) = m_j C_{i,j-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, I, \; j = 1, \ldots, I,$$

2) kaikilla $i \neq j$,

$$(C_{i0}, \ldots, C_{iI}) \text{ ja } (C_{j0}, \ldots, C_{jI}) \text{ ovat riippumattomia.}$$

Oletetaan siis, että kertoimet m_j riippuvat vain suhteellisesta suoritusvuodesta j (mutta eivät sattumisvuodesta). Sattumisvuodet oletetaan riippumattomiksi.

Kertoimia m_j kutsutaan *Chain-Ladder -kertoimiksi* tai *kehityskertoimiksi*. Niiden estimaatit ovat sarakesummien osamääriä, joten ne kuvaavat suoritusvuosittain vahinkomäärien kasvua.

Merkitään

$$D = \sigma(C_{kj},\ k,j \geq 0,\ k+j \leq I),$$
$$D_k = \sigma(C_{kj},\ 0 \leq j \leq I-k),\ k = 0,1,\dots,I$$

ja

$$B_k = \sigma(C_{ij},\ 0 \leq j \leq k,\ i+j \leq I),\ k = 0,1,\dots,I.$$

Tällöin D sisältää informaation koko historiasta (koko selviämiskolmio), D_k sattumisvuodesta k (yksi rivi kolmiossa) ja B_k suhteellisista suoritusvuosista $j \leq k$ (kolmiosta on katkaistu kärki oikealta).

Lause 8.2.1. Olkoon $\mathbb{P}(C_{i0} > 0) = 1$ kaikilla $i \geq 0$. Oletusten 1) ja 2) ollessa täytetyt pätee

$$\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) = m_{I-i+1} \cdots m_I C_{i,I-i}, \tag{8.2.2}$$

ja

$$\mathbb{E}(\hat{m}_j \hat{m}_{j+1} \cdots \hat{m}_I) = m_j m_{j+1} \cdots m_I. \tag{8.2.3}$$

Tulos (8.2.2) motivoi käyttämään (8.2.1):n mukaista estimaattia lopulliselle vahinkomäärälle edellyttäen, että tulot $m_{I-i+1} \cdots m_I$ pystytään estimoimaan. Harhattomat estimaatit näille saadaan kaavasta (8.2.3).

Lauseen 8.2.1 todistus. Oletuksen 2) nojalla $\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) = \mathbb{E}(C_{iI} \mid D_i)$. Käyttämällä ehdollisen odotusarvon iteratiivisuusominaisuutta ja oletusta 1) saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_{iI} \mid D) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(C_{iI} \mid C_{i0},\dots,C_{i,I-1}) \mid D_i\} \\
&= \mathbb{E}(m_I C_{i,I-1} \mid D_i) \\
&= m_I \mathbb{E}(C_{i,I-1} \mid D_i) \\
&= \cdots \\
&= m_I \cdots m_{I-i+1} \mathbb{E}(C_{i,I-i} \mid D_i) \\
&= m_I \cdots m_{I-i+1} C_{i,I-i}.
\end{aligned}$$

Siis (8.2.2) on todistettu. Oletuksen 2) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(C_{ij} \mid B_{j-1}) &= \mathbb{E}(C_{ij} \mid C_{i0},\dots,C_{i,j-1}) \\
&= m_j C_{i,j-1}, \quad j \geq 1.
\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{m}_j \mid B_{j-1}) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}} \mid B_{j-1}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j-1}\right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} m_j C_{i,j-1} = m_j.
\end{aligned}$$

Nähdään, että myös $\mathbb{E}(\hat{m}_j) = m_j$. Hyödyntämällä saatuja tuloksia toistuvasti saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{m}_j\hat{m}_{j+1}\cdots\hat{m}_I) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\hat{m}_j\hat{m}_{j+1}\cdots\hat{m}_I \mid B_{I-1})\} \\
&= \mathbb{E}\{\hat{m}_j\hat{m}_{j+1}\cdots\hat{m}_{I-1}\mathbb{E}(\hat{m}_I \mid B_{I-1})\} \\
&= m_I\mathbb{E}\{\hat{m}_j\hat{m}_{j+1}\cdots\hat{m}_{I-1}\} \\
&= \cdots \\
&= m_I\cdots m_{j+1}\,\mathbb{E}\{\hat{m}_j\} = m_j\cdots m_I. \square
\end{aligned}$$

Chain-Ladder -menetelmä nojautuu oletuksen 1) ilmaisemaan korvausten kehitystä kuvaavaan malliin. Tämän puitteissa saatiin tulos (8.2.2), joka motivoi havaintoaineiston suoraviivaiseen käyttämiseen estimoinnissa. Seuraavassa pyritään tarkentamaan näkemyksiä korvausvastuusta pidemmälle menevän mallinnuksen avulla.

8.3 Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän ennustamisesta

Kiinteällä hetkellä tuntemattomia ovat sellaiset vahingot, jotka ovat jo sattuneet, mutta joista yhtiö ei ole vielä saanut korvausvaatimusta (tai muuta vastaavaa informaatiota). Näitä koskeva korvausvastuu on mitoitettava nojautuen tilastollisiin menetelmiin. Tarkastellaan seuraavassa vain tuntemattomien vahinkojen lukumääräennusteita. Tätä voidaan hyödyntää suoraan korvausvastuun ennustamisessa, jos korvausvaatimusten saapuminen ei riipu vahinkojen suuruuksista. *Raportoitumisviiveellä* tarkoitetaan aikaa vahingon sattumisesta korvausvaatimuksen saapumiseen yhtiöön. Vahingon *tietoontulohetki* tai *raportoitumishetki* on sattumishetki lisättynä raportoitumisviiveellä.

Tarkastellaan aikavälillä $(0, d]$ sattuvien vahinkojen tietoontuloa, missä $d > 0$ on kiinteä. Oletetaan seuraavassa, että

1) vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteettifunktiolla Λ, missä

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du, \ \forall t \geq 0, \tag{8.3.1}$$

ja kuvaus $t \to \lambda(t)$ on aidosti positiivinen, rajoitettu äärellisillä väleillä ja paloittain jatkuva (äärellisillä väleillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia)

2) sattuneen vahingon raportoitumisviiveen kertymäfunktio on G, missä $G(0) = 0$

3) vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja vahinkojen lukumääräprosessista riippumattomia.

Erityisesti siis oletetaan, että raportoitumisviiveet ovat samoin jakautuneita. Olkoon $\{K(t)\}$ vahinkojen sattumista kuvaava Poisson-prosessi. Mielivaltaiselle $u \geq 0$ määritellään

$$\begin{aligned} V_d(u) \quad = \quad & \text{niiden vahinkojen lukumäärä, jotka sattuvat välillä } (0, d] \\ & \text{ja raportoituvat välillä } (0, u]. \end{aligned}$$

Olkoot $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = +\infty$. Merkitään

$$I_1 = (t_0, t_1], \ldots, I_{n-1} = (t_{n-2}, t_{n-1}], \ I_n = (t_{n-1}, t_n).$$

Lause 8.3.1. Oletetaan, että ehdot 1), 2) ja 3) on täytetty. Silloin $V_d(t_i) - V_d(t_{i-1})$ on Poisson-jakautunut parametrilla

$$\int_0^d \lambda(s)(G(t_i - s) - G(t_{i-1} - s))\, ds, \ i = 1, \ldots, n. \tag{8.3.1.1}$$

Lisäksi $V_d(t_1) - V_d(t_0), \ldots, V_d(t_n) - V_d(t_{n-1})$ ovat riippumattomia.

Huomautus 8.3.1. Koska $t_0 = 0$ ja $t_n = +\infty$, niin integrandi (8.3.1.1):ssä on $G(t_1 - s)$, jos $i = 1$ ja $1 - G(t_{n-1} - s)$, jos $i = n$. Vastaavasti $V_d(t_0) = 0$ ja $V_d(t_n) = K(d)$.

Huomautus 8.3.2. Lauseen nojalla havaitut vahinkojen lukumäärät eivät anna informaatiota tulevista raportoitumisista (edellyttäen, että Λ ja G ovat tunnettuja).

Todistetaan ensin seuraava Poisson-prosessin hyppyhetkiä koskeva tulos. Hyppyhetket tulkitaan siis vahinkojen sattumishetkiksi.

Lemma 8.3.1. Olkoon $\{K(t)\}$ oletuksen 1) täyttävä Poisson-prosessi ja olkoon prosessin i. hyppyhetki S_i, $i = 1, 2, \ldots$. Silloin kaikilla $0 \le s_1 \le \cdots \le s_k \le d$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(S_i \le s_i, i = 1, \ldots, k \mid K(d) = k) \\ = \ &\frac{k!}{\Lambda(d)^k} \int_0^{s_1} \left(\cdots \int_{x_{k-2}}^{s_{k-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{s_k} \lambda(x_1) \cdots \lambda(x_k) dx_k \right) dx_{k-1} \cdots \right) dx_1.\end{aligned}$$

Siis ehdolla $K(d) = k$, satunnaisvektorin $(S_1, \ldots, S_k)$ tiheysfunktio f on

$$f(s_1, \ldots, s_k) = \frac{k!}{\Lambda(d)^k} \lambda(s_1) \cdots \lambda(s_k) \mathbb{1}(0 \le s_1 \le \cdots \le s_k \le d).$$

Huomautus 8.3.3. Jos $Y_1, \ldots, Y_k$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia tiheysfunktiona $y \to \lambda(y)/\Lambda(d)$ alueessa $y \in [0, d]$, niin järjestetyn otoksen $(Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)})$ tiheysfunktio on juuri lemman 8.3.1 f ($Y_{(1)}$ on pienin havainnoista $Y_1, \ldots, Y_k$, $Y_{(2)}$ toiseksi pienin jne.). Kts. Mikosch (2004), kohta 2.1.6.

Lemman 8.3.1 todistus. Jos $\lambda(t) \equiv \lambda$ (jolloin $\{K(t)\}$ on homogeeninen Poisson-prosessi), niin tulos seuraa suoralla integroinnilla siitä, että $S_1, S_2 - S_1, \ldots, S_k - S_{k-1}$ ovat riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla λ. Kts. esimerkiksi Karlin and Taylor (1975), s.126. Tulos on tällöin

$$\mathbb{P}(S_i \le s_i, i = 1, \ldots, k \mid K(d) = k) = \frac{k!}{d^k} \int_0^{s_1} \left(\cdots \int_{x_{k-2}}^{s_{k-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{s_k} dx_k \right) dx_{k-1} \cdots \right) dx_1. \tag{8.3.1.2}$$

Olkoon nyt λ yleinen. Merkitään $\tau(t) = \Lambda^{-1}(t)$, $t \ge 0$, ja määritellään prosessi $\{K^*(t)\}$ ehdosta

$$K^*(t) = K(\tau(t)).$$

Tällöin $\{K^*(t)\}$ on homogeeninen Poisson-prosessi, kts. lauseen 3.1.4 todistus. Olkoot $S_1^*, S_2^*, \ldots$ tämän hyppyhetket, $S_i^* = \tau^{-1}(S_i), i = 1, 2, \ldots$. Lemman väitteen todennäköisyys on sama kuin

$$\mathbb{P}(S_i^* \le \tau^{-1}(s_i), i = 1, \ldots, k \mid K^*(\tau^{-1}(d)) = k),$$

joka kaavan (8.3.1.2) nojalla on edelleen

$$\frac{k!}{\Lambda(d)^k} \int_0^{\tau^{-1}(s_1)} \left(\cdots \int_{x_{k-2}}^{\tau^{-1}(s_{k-1})} \left(\int_{x_{k-1}}^{\tau^{-1}(s_k)} dx_k \right) dx_{k-1} \cdots \right) dx_1. \tag{8.3.1.3}$$

Tekemällä sisimpään integraaliin sijoitus $x_k = \tau^{-1}(y_k)$ saadaan

$$\int_{x_{k-1}}^{\tau^{-1}(s_k)} dx_k = \int_{\tau(x_{k-1})}^{s_k} \lambda(y_k) dy_k.$$

Vastaavasti tekemällä toiseksi sisimpään integraaliin sijoitus $x_{k-1} = \tau^{-1}(y_{k-1})$ saadaan

$$\int_{x_{k-2}}^{\tau^{-1}(s_{k-1})} \left(\int_{\tau(x_{k-1})}^{s_k} \lambda(y_k) dy_k \right) dx_{k-1} = \int_{\tau(x_{k-2})}^{s_{k-1}} \left(\int_{y_{k-1}}^{s_k} \lambda(y_k) dy_k \right) \lambda(y_{k-1}) dy_{k-1}.$$

Jatkaen samalla tavalla ja käyttäen lopuksi tietoa $\tau(0) = 0$ saadaan lemman väite. $\square$

Lauseen 8.3.1 todistus. Olkoon i. vahingon raportoitumisviive R_i. Riippumattomuuden ja lemman 8.3.1 nojalla kaikilla $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ ja $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq d$,

$$\mathbb{P}(R_1 \leq r_1, \ldots, R_k \leq r_k, S_1 \leq s_1, ..., S_k \leq s_k \mid K(d) = k)$$

$$= \frac{k!}{\Lambda(d)^k} G(r_1) \cdots G(r_k) \int_0^{s_1} \left(\cdots \int_{x_{k-2}}^{s_{k-1}} \left(\int_{x_{k-1}}^{s_k} \lambda(x_1) \cdots \lambda(x_k) dx_k \right) dx_{k-1} \cdots \right) dx_1.$$

Olkoot $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sellaisia, että $k_1 + \cdots + k_n = k$. Ilmeisesti

$$\begin{aligned} &\{K(d) = k, V_d(t_1) - V_d(t_0) = k_1, \ldots, V_d(t_n) - V_d(t_{n-1}) = k_n\} \\ = \ &\{K(d) = k\} \bigcap_{i=1}^{n} \{\#\{j \leq k \mid S_j + R_j \in I_i\} = k_i\}\}. \end{aligned}$$

Määrätään

$$\mathbb{P}(V_d(t_1) - V_d(t_0) = k_1, \ldots, V_d(t_n) - V_d(t_{n-1}) = k_n \mid K(d) = k). \tag{8.3.2}$$

Olkoon

$$\begin{aligned} A = \ &\{(r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid \\ &0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq d, \#\{j \leq k \mid s_j + r_j \in I_i\} = k_i, i = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Ositetaan A sen mukaan, monesko sattunut vahinko raportoituu kullakin välillä. Olkoon

$$\{i_{11}, \ldots, i_{1k_1}, \ldots, i_{n1}, \ldots, i_{nk_n}\} = \{1, \ldots, k\}.$$

Tulkitaan, että $i_{11}., \ldots, i_{1k_1}$. vahinko raportoituu aikavälillä I_1, $i_{21}., \ldots, i_{2k_2}$. vahinko raportoituu aikavälillä I_2 jne. Seuraavassa merkintä $\sum'$ tarkoittaa summausta yli kaikkien tällaisten ositusten (joita on $\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}$ kappaletta). Saadaan

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(V_d(t_1) - V_d(t_0) = k_1, \ldots, V_d(t_n) - V_d(t_{n-1}) = k_n \mid K(d) = k) \\
= \; & \mathbb{P}(\sum_{m=1}^{k} \mathbb{1}(S_m + R_m \in I_i) = k_i, i = 1, \ldots, n \mid K(d) = k) \\
= \; & \frac{k!}{\Lambda(d)^k} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \mathbb{1}(A)\, \lambda(s_1) \cdots \lambda(s_k) dG(r_1) \cdots dG(r_k) ds_1 \cdots ds_k \\
= \; & \frac{k!}{\Lambda(d)^k} \int_{0 \le s_1 \le \cdots \le s_k \le d} \sum{}' \lambda(s_1) \cdots \lambda(s_k) \\
& (G(t_1 - s_{i_{11}}) - G(t_0 - s_{i_{11}})) \cdots (G(t_1 - s_{i_{1k_1}}) - G(t_0 - s_{i_{1k_1}})) \\
& \ldots \\
& \cdot (G(t_n - s_{i_{n1}}) - G(t_{n-1} - s_{i_{n1}})) \cdots (G(t_n - s_{i_{nk_n}}) - G(t_{n-1} - s_{i_{nk_n}}))\, ds_1 \cdots ds_k.
\end{aligned}$$

Integrandi on symmetrinen muuttujien $s_1, \ldots, s_k$ suhteen. Käymällä läpi kaikki $k!$ muuttujien eri permutaatiota integroimisalueessa saadaan ilmeisesti yhteenlaskemalla integraali yli suorakulmion $[0, d]^k$ (ko. joukkojen unioni on $[0, d]^k$ ja leikkaukset nollamittaisia joukkoja). Siis

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(V_d(t_1) - V_d(t_0) = k_1, \ldots, V_d(t_n) - V_d(t_{n-1}) = k_n \mid K(d) = k) \\
& = \frac{1}{\Lambda(d)^k} \sum{}' \int_0^d \lambda(s_{i_{11}})(G(t_1 - s_{i_{11}}) - G(t_0 - s_{i_{11}})) ds_{i_{11}} \\
& \qquad \cdots \int_0^d \lambda(s_{i_{1k_1}})(G(t_1 - s_{i_{1k_1}}) - G(t_0 - s_{i_{1k_1}})) ds_{i_{1k_1}} \\
& \ldots \\
& \int_0^d \lambda(s_{i_{n1}})(G(t_n - s_{i_{n1}}) - G(t_{n-1} - s_{i_{n1}})) ds_{i_{n1}} \\
& \qquad \cdots \int_0^d \lambda(s_{i_{nk_n}})(G(t_n - s_{i_{nk_n}}) - G(t_{n-1} - s_{i_{nk_n}})) ds_{i_{nk_n}} \\
& = \frac{1}{\Lambda(d)^k} \sum{}' \left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_1 - s) - G(t_0 - s)) ds \right]^{k_1} \\
& \qquad \cdots \left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_n - s) - G(t_{n-1} - s)) ds \right]^{k_n} \\
& = \frac{1}{\Lambda(d)^k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} \left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_1 - s) - G(t_0 - s)) ds \right]^{k_1} \\
& \qquad \cdots \left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_n - s) - G(t_{n-1} - s)) ds \right]^{k_n}.
\end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(V_d(t_1)-V_d(t_0)=k_1,\ldots,V_d(t_n)-V_d(t_{n-1})=k_n) \\
= \; & \mathbb{P}(K(d)=k)\,\mathbb{P}(V_d(t_1)-V_d(t_0)=k_1,\ldots,V_d(t_n)-V_d(t_{n-1})=k_n \mid K(d)=k) \\
= \; & e^{-\Lambda(d)}\frac{\Lambda(d)^k}{k!}\,\frac{1}{\Lambda(d)^k}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!} \\
\cdot \; & \left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_1-s)-G(t_0-s))ds\right]^{k_1}\cdots\left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_n-s)-G(t_{n-1}-s))ds\right]^{k_n} \\
= \; & e^{-\int_0^d \lambda(s)(G(t_1-s)-G(t_0-s))ds}\,\frac{\left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_1-s)-G(t_0-s))ds\right]^{k_1}}{k_1!} \\
\cdots \; & e^{-\int_0^d \lambda(s)(G(t_n-s)-G(t_{n-1}-s))ds}\,\frac{\left[\int_0^d \lambda(s)(G(t_n-s)-G(t_{n-1}-s))ds\right]^{k_n}}{k_n!}.
\end{aligned}
$$

Lauseen väitteet seuraavat tästä. □

Seuraus 8.3.1. Lauseen 8.3.1 oletuksin prosessi $\{V_d(t) \mid t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi intensiteettifunktiolla Λ_d, missä

$$\Lambda_d(t) = \int_0^d \lambda(s)G(t-s)ds,\ t \geq 0.$$

Todistus. Määritelmän nojalla

$$V_d(t) = \#\{i \mid S_i \leq d, S_i + R_i \leq t\}. \tag{8.3.3}$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinteä. Jos $\omega \in \{K(d)=n\}$, niin tätä vastaava $V_d(t)$:n realisaatio on kasvava, oikealta jatkuva ja kokonaislukuarvoinen (kysymykseen tulevat i-indeksit (8.3.3):ssa ovat $1,\ldots,n$, jolloin kaikki seuraa suoraan $V_d(t)$:n määritelmästä). Nähdään, että vastaavat ominaisuudet pätevät todennäköisyydellä yksi. Osoitetaan, että

$$\mathbb{P}(V_d(t)-V_d(t-) \geq 2 \text{ jollain } t) = 0. \tag{8.3.3.1}$$

Yhdistettynä alkuosan tuloksiin nähdään, että $\{V_d(t)\}$ on laskuriprosessi, jolloin se on siis Poisson-prosessi väitteen mukaisella intensiteettifunktiolla. Olkoot $T > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ suuria. Jaetaan väli $[0,T]$ N:ään yhtä pitkään osaan. Olkoot päätepisteet $u_0, u_1, \ldots, u_N$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}(V_d(u_{i+1})-V_d(u_i) \geq 2 \text{ jollain } i=0,1,\ldots,N-1) && (8.3.2.2) \\
\leq \; & N\max\{\mathbb{P}(V_d(u_{i+1})-V_d(u_i) \geq 2) \mid i=0,1,\ldots,N-1\}.
\end{aligned}
$$

Lauseen 8.3.1 nojalla

$$\mathbb{P}(V_d(u_{i+1})-V_d(u_i) \geq 2) = 1 - e^{-(\Lambda(u_{i+1})-\Lambda(u_i))} - e^{-(\Lambda(u_{i+1})-\Lambda(u_i))}(\Lambda(u_{i+1})-\Lambda(u_i)).$$

Olkoon

$$\bar{\lambda} = \sup\{\lambda(t) | t \in [0, T]\}.$$

Tällöin $|\Lambda(u_{i+1}) - \Lambda(u_i)| \leq \bar{\lambda}T/N$ kaikilla i. Kuvaus $x \to 1 - e^{-x} - xe^{-x}$ on kasvava alueessa $x > 0$, joten

$$\mathbb{P}(V_d(u_{i+1}) - V_d(u_i) \geq 2) \leq 1 - e^{-\bar{\lambda}T/N}(1 + \bar{\lambda}T/N)$$

$$\leq 1 - \left(1 - \bar{\lambda}T/N\right)(1 + \bar{\lambda}T/N) = (\bar{\lambda}T/N)^2.$$

Nähdään, että (8.3.3.2) on korkeintaan $(\bar{\lambda}T)^2/N \to 0$, kun $N \to \infty$. Siispä

$$\mathbb{P}(V_d(t) - V_d(t-) \geq 2 \text{ jollain } t \leq T) = 0,$$

joren myös (8.3.3.1) on tosi ja $\{V_d(t)\}$ on laskuriprosessi. □

Tarkastellaan nyt Chain-Ladder -menetelmän taustaoletusta 1) lauseen 8.3.1 tilanteessa. Oletetaan yksinketaisuuden vuoksi, että $G(1) = 1$ ts. että kaikki vahingot raportoituvat vuoden kuluessa sattumisesta ja että vahingot ovat vakiosuuruisia (= 1). Olkoon $V = V_1(1)$ hetkellä $t = 1$ tunnettujen ja $U = K(1) - V_1(1)$ tuntemattomien vahinkojen lukumäärä. Tarkastellaan korvausvastuuta U hetkellä $t = 1$. Chain-Ladder -menetelmässä oletettiin, että

$$\mathbb{E}(U + V \mid V) = mV, \tag{8.3.4}$$

missä m on vakio. Lauseen 8.3.1 nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U + V \mid V) &= V + \mathbb{E}(U \mid V) \\ &= V + \mathbb{E}(U) = V + \lambda \int_0^1 (1 - G(u))du. \end{aligned}$$

Siis (8.3.4) ei toteudu.

8.4 Credibility-teorian näkökulma korvausvastuuseen

Chain-Ladder -menetelmä antoi erään tavan estimoida korvausvastuuta. Toisaalta lause 8.3.1 ei tue tätä tapaa yksinkertaisessa perusmallissa. Havaintoaineistoa voidaan käyttää Poisson-parametrin ja kertymäfunktion G estimoimiseen, mutta korvausvastuuennusteen ei tulisi muuten riippua tarkasteltavan sattumisvuoden havainnosta. Kts. myös Rantala (1984), Ruohonen (1988) ja Norberg (1993).

Toisaalta lauseen 8.3.1 oletuksia 1), 2) ja 3) voidaan pitää turhan voimakkaina. Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa vahinkoja sattuu painotetun Poisson-prosessin mukaisesti parametrilla (λ, Q). Oletus 2) säilytetään ennallaan. Oletus 3) säilytetään myös, mutta oletetaan lisäksi, että struktuurimuuttujat ovat rippumattomia raportoitumisviiveistä.

Tarkastellaan välillä $[0,1]$ sattuneita vahinkoja koskevaa tuntemattomien vahinkojen lukumäärän ennustamista hetkellä $t \geq 1$. Tällöin on havaittu näistä hetkeen t mennessä tietoon tulleet. Näiden lukumäärä on $V_1(t)$. Tehtävänä on siis ennustaa

$$U_1(t) := K(1) - V_1(t).$$

Ilmeisesti nyt tunnettujen vahinkojen lukumäärä kertoo jotain struktuurimuuttujasta $Q = Q_1$. Koska $U_1(t)$ riippuu myös Q:sta, voidaan odottaa riippuvuutta $U_1(t)$:n ja $V_1(t)$:n välillä. Tätä voidaan hyödyntää ennustamisessa.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi kirjoitetaan lyhyesti $U(t) = U_1(t)$ ja $V(t) = V_1(t)$. Luonnollinen ehdokas $U(t)$:n ennusteeksi on ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}(U(t) \mid V(t)).$$

Tämä on muotoa $h(V(t))$, missä h on eräs mitallinen funktio. Tyypillisesti h:n selvittäminen on hankalaa. Usein rajoitutaankin tyyppiä

$$a + bV(t)$$

oleviin ennusteisiin, missä a ja b ovat vakioita. Tunnettua on, että ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(U(t) \mid V(t))$ minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left([U(t) - f(V(t))]^2\right)$$

yli kaikkien mitallisten kuvausten f. Tähän tulokseen nojautuen on luontevaa vaatia samantyyppistä minimaalisuusominaisuutta vakioilta a ja b. Määrätään siis a ja b siten, että

$$\mathbb{E}\left([U(t) - a - bV(t)]^2\right) \tag{8.4.1}$$

minimoituu.

Lause 8.4.1. Olkoot $\mathrm{Var}(V(t))$ ja $\mathrm{Var}(U(t))$ äärellisiä. Silloin (8.4.1) minimoituu, kun

$$a = a_t^* = \mathbb{E}(U(t)) - b_t^* \mathbb{E}(V(t)),$$

$$b = b_t^* = \frac{\mathrm{Cov}(V(t), U(t))}{\mathrm{Var}(V(t))}.$$

Todistus (pääpiirteissään). Asetetaan (8.4.1):n osittaisderivaatat a:n ja b:n suhteen nolliksi, jolloin saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} = -2\mathbb{E}\left(U(t) - a - bV(t)\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b} = -2\mathbb{E}\left(V(t)(U(t) - a - bV(t))\right) = 0. \end{cases}$$

Yhtäpitävästi

$$a + b\mathbb{E}(V(t)) = \mathbb{E}(U(t)),$$
$$a\mathbb{E}(V(t)) + b\mathbb{E}\left(V(t)^2\right) = \mathbb{E}(V(t)U(t)).$$

Tämän ratkaisu on lauseen väitteen mukainen. Tarkastelemalla toisen kertaluvun derivaattoja nähdään, että kyseessä on minimi. □

Merkitään

$$H_t = \int_0^1 G(t-s)ds, \quad t \geq 1,$$

missä G on lauseen 8.3.1 mukainen.

Lause 8.4.2. Olkoon $\sigma_Q^2 \in (0,\infty)$ ja $H_t > 0$. Silloin (8.4.1) minimoituu, kun valitaan $a = a_t^*$ ja $b = b_t^*$, missä

$$\begin{aligned} a_t^* &= (1-c_t)\mathbb{E}(U(t)), \\ b_t^* &= c_t \frac{1-H_t}{H_t}, \\ c_t &= \frac{\lambda H_t \sigma_Q^2}{1+\lambda H_t \sigma_Q^2}, \end{aligned}$$

missä $\mathbb{E}(U(t)) = \lambda(1-H_t)$.

Todistus. Lauseen 8.4.1 nojalla

$$\begin{aligned} a_t^* &= \mathbb{E}(U(t)) - b_t^*\mathbb{E}(V(t)), \\ b_t^* &= \frac{\mathrm{Cov}(U(t),V(t))}{\mathrm{Var}(V(t))}. \end{aligned}$$

Lauseen 8.3.1 nojalla $U(t)$ on painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda(1-H_t),Q)$ ja $V(t)$ painotettu Poisson-muuttuja parametrilla $(\lambda H_t, Q)$. Struktuurimuuttuja on kummallakin siis sama. Lauseen 3.2.1 nojalla

$$\mathrm{Var}(V(t)) = \lambda H_t + \lambda^2 H_t^2 \sigma_Q^2.$$

Lauseen 8.3.1 nojalla $U(t)$ ja $V(t)$ ovat ehdollisesti riippumattomia ehdolla Q. Siis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(t)V(t)) &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(U(t)V(t) \mid Q)\} \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}(U(t) \mid Q)\,\mathbb{E}(V(t) \mid Q)\} \\ &= \mathbb{E}(\lambda^2(1-H_t)H_t Q^2) = \lambda^2 H_t(1-H_t)\mathbb{E}(Q^2). \end{aligned}$$

Edelleen

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(U(t),V(t)) &= \mathbb{E}(U(t)V(t)) - \mathbb{E}(U(t))\mathbb{E}(V(t)) \\ &= \lambda^2 H_t(1-H_t)\sigma_Q^2. \end{aligned}$$

Siis

$$a_t^* = \lambda(1-H_t)\left(1 - \frac{\lambda H_t \sigma_Q^2}{1+\lambda H_t \sigma_Q^2}\right) = (1-c_t)\,\mathbb{E}(U(t))$$

ja

$$b_t^* = \frac{\lambda(1-H_t)\sigma_Q^2}{1+\lambda H_t \sigma_Q^2} = c_t\,\frac{1-H_t}{H_t}. \square$$

Lause 8.4.2 antaa tuntemattomien vahinkojen lukumäärälle vuoden t lopussa ennusteen

$$\begin{aligned} U^*(t) &= a_t^* + b_t^* V(t) \\ &= (1-c_t)\mathbb{E}(U(t)) + c_t\,\frac{1-H_t}{H_t}\,V(t). \end{aligned}$$

Tässä

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1-H_t}{H_t}\,V(t)\right) &= \frac{1-H_t}{H_t}\,\lambda H_t \\ &= \lambda(1-H_t) = \mathbb{E}(U(t)). \end{aligned}$$

Ennuste on painotettu keskiarvo odotusarvosta $\mathbb{E}(U(t))$ ja asianmukaisesti normeeratusta havaitusta tunnettujen vahinkojen lukumäärästä $V(t)$. Parametria c_t kutsutaan *credibility-kertoimeksi* ja ennustetta $U^*(t)$ tuntemattomien vahinkojen *credibility-ennusteeksi*.

Kerroin c_t kuvaa luottamusta havaintoon $V(t)$ ja on mielekäs seuraavasti:

(i) Poisson-muuttujan suhteellinen hajonta (hajonta/odotusarvo) on pieni, jos Poisson-parametri on suuri. Tämä motivoi käyttämään suurta c_t:tä, jos λH_t on suuri (jos $Q = q$, niin havaitaan suurella todennäköisyydellä $V(t) \approx \lambda H_t q$).

(ii) Suuri struktuurimuuttujan varianssi merkitsee sitä, että Poisson-parametrit eri vuosina eroavat paljon toisistaan. On siis perusteltua antaa painoarvoa vuosihavainnolle $V(t)$ eli käyttää suurta c_t:tä.

Credibility-ennustetta $U^*(t)$ voidaan pitää kompromissina Chain-Ladder -estimaatin ja lauseen 8.3.1 tukeman vahinkohistoriasta riippumattoman estimaatin välillä.

9 Vakuutusyhtiön vakavaraisuudesta

Aiemmin on jo tarkasteltu ns. *vararikko-ongelmaa* lyhyellä aikavälillä, tyypillisesti yhden vuoden tähtäimellä. Kyseessä on tällöin seuraava asetelma:

1) Yhtiöllä on vuoden alussa alkupääoma U_0

2) Yhtiö harjoittaa vakuutustoimintaa yhden vuoden

3) Kysytään, millä todennäköisyydellä yhtiö selviää vuoden loppuun asti sitoumuksistaan.

Lyhyt aikajänne on usein riittävä tarkasteltaessa asiaa vakuutusyhtiön valvonnan näkökulmasta. Jos kohdassa 3) mainittu todennäköisyys on riittävän pieni (esimerkiksi luokkaa $10^{-3} - 10^{-2}$), voidaan ajatella tilanne turvalliseksi vakuutettujen näkökulmasta. Jos taas todennäköisyys ylittää asetetun vaatimuksen, saattaa olla vielä mahdollista esimerkiksi fuusioida huonokuntoinen yhtiö vakavaraisempaan yhtiöön. Tällöin vakuutetut edut voitaisiin turvata, eikä tilanne olisi välttämättä epäedullinen vastaanottavalle yhtiölle.

Tarkastellaan seuraavassa ns. pitkän aikavälin vararikko-ongelmaa. Tämä on kiinnostavaa ainakin yhtiön johdon ja omistajien mutta myös vakuutuksenottajien näkökulmasta. Luonteeltaan asia on edellä mainittuja kohtia 1-3 vastaava, aikajänne vain on pidempi. Nyt kysytään, millä todennäköisyydellä yhtiön varallisuus on positiivinen kaikkina ajanhetkinä tai diskreettiaikaisesti, jokaisen vuoden lopussa. Tarkasteltava aikaväli voisi olla esimerkiksi 10 vuotta tai vaikkapa koko tulevaisuus.

Tarkastellaan aluksi klassiseen varallisuusprosessin malliin liittyviä teoreettisluonteisia tuloksia. Myöhemmin käsitellään yleistyksiä lähinnä mallinnuksen ja simuloinnin näkökulmasta.

9.1 Klassinen vararikko-ongelma

Olkoon yhtiön alkupääoma $U_0 > 0$ ja

$$\begin{aligned} \xi_n &= \text{vuoden } n \text{ tappio}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ Y_n &= \xi_1 + \cdots + \xi_n, \ \text{kumulatiivinen tappio.} \end{aligned}$$

Vararikkohetki $T = T(U_0)$ määritellään ehdosta

$$T = \begin{cases} \inf\{n \mid Y_n > U_0\} \\ +\infty, \ \text{jos } Y_n \leq U_0, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Siis T on ensimmäinen ajanhetki, jona kumulatiivinen tappio ylittää alkupääoman. Tällöin koko alkupääoma on menetetty ja yhtiö tekee vararikon.

Oletetaan, että $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon c näiden yhteinen kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{s\xi}), \quad s \in \mathbb{R},$$

ja

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\}.$$

Konveksi konjugaatti olkoon c^*,

$$c^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c(s)\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$\bar{s} = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\} \in [0, \infty]$$

ja

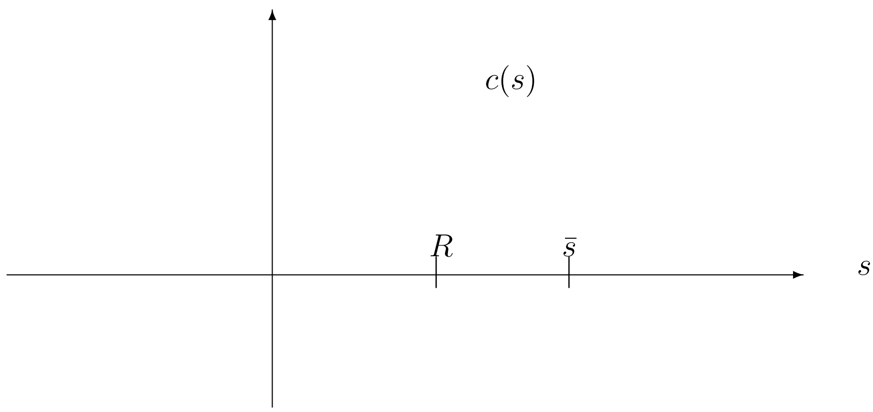
$$\underline{x} = \lim_{s \to \bar{s}-} \frac{1}{c'(s)}.$$

Raja-arvo on olemassa, koska c' on konveksisuuden nojalla kasvava. Määritellään kuvaus $h : (\underline{x}, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ehdosta

$$h(x) = xc^*(1/x).$$

Lemma 9.1.1. Olkoon $\mathbb{E}(\xi) < 0$ ja $\mathrm{Var}(\xi) > 0$. Oletetaan lisäksi, että $c(s) \in (0, \infty)$ jollain $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $R \in (0, \infty)$, jolle $c(R) = 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \infty)$, niin on olemassa yksikäsitteinen $s_x \in (0, \bar{s})$ siten, että $c'(s_x) = 1/x$ ja lisäksi $h'(x) = -c(s_x)$. Olkoon $\mu_T = 1/c'(R)$. Silloin $h(\mu_T) = R$, h on aidosti vähenevä välillä $(\underline{x}, \mu_T]$ ja aidosti kasvava välillä $[\mu_T, \infty)$.

Parametria R kutsutaan *Lundbergin eksponentiksi*. Nimitys tulee seuraavan lauseen tuloksista. Oletus $\mathbb{E}(\xi) < 0$ merkitsee sovelluksen näkökulmasta sitä, että vakuutusmaksu sisältää positiivisen varmuuslisän.



Lemman 9.1.1 todistus. Osoitetaan ensin, että c on aidosti konveksi alueessa $\mathring{\mathcal{D}}$. Olkoon $s_0 \in \mathring{\mathcal{D}}$. Tällöin $c''(s_0) = \mathrm{Var}_{s_0}(\xi) \geq 0$ (varianssi konjugaattijakauman P_{s_0} suhteen). Erisuuruus on aito, sillä muuten P_{s_0} keskittyisi yhteen pisteeseen ja samoin myös alkuperäinen jakauma. Siis $c''(s_0) > 0$, joten c on aidosti konveksi.

Koska $\mathbb{E}(\xi) < 0$, niin $c(s)$ on negatiivinen jollain $s > 0$. Oletuksen mukaan myös $c(s) > 0$ jollain $s > 0$, joten lemman mukainen R on olemassa. Yksikäsitteisyys seuraa c:n konveksisuudesta. Koska c' on jatkuva joukossa $\mathring{\mathcal{D}}$, niin ilmeisesti $c'(s) = 0$ eräälle $s > 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \infty)$, niin aidon konveksisuuden nojalla on olemassa yksikäsitteinen $s_x \in (0, \infty)$, jolle $c'(s_x) = 1/x$. Yhteys määrittelee kuvauksen $x \to s_x$, joka on derivoituva (sillä $s_x = (c')^{-1}(1/x)$).

Tarkastellaan nyt funktiota h. Saadaan

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(s_x/x - c(s_x)\right)\right) \\ &= \frac{\partial s_x}{\partial x} - xc'(s_x)\frac{\partial s_x}{\partial x} - c(s_x) = -c(s_x). \end{aligned}$$

Jos nyt $x = \mu_T$, niin $s_x = R$ ja $h'(x) = 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \mu_T)$, niin $s_x > R$, joten $h'(x) < 0$. Siis h on aidosti vähenevä välillä $(\underline{x}, \mu_T]$. Samoin nähdään, että h on aidosti kasvava välillä $[\mu_T, \infty)$. □

Lause 9.1.1. Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ kuten edellä. Lemman 9.1.1 oletuksin

$$\mathbb{P}(T < \infty) \leq e^{-RU_0} \tag{9.1.1}$$

kaikilla $U_0 > 0$ ja

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R. \tag{9.1.2}$$

Tulos (9.1.1) antaa ehdottoman ylärajan vararikkotodennäköisyydelle jokaisella alkupääomalla. Raja-arvo (9.1.2) osoittaa, että eksponentti R on paras mahdollinen siinä mielessä, että mielivaltaiselle $R' > R$ pätee

$$\mathbb{P}(T < \infty) > e^{-R'U_0}$$

jostain U_0:n arvosta lähtien. Rajankäynti $U_0 \to \infty$ (9.1.2):ssa on motivoitu siksi, että suuri U_0 vastaa pientä vararikkotodennäköisyyttä. Yleensä tätä edellytetään myös pitkän aikavälin tarkasteluissa.

Äärelliselle aikajänteelle pätee seuraava lauseen 9.1.1 analogia.

Lause 9.1.2. Olkoon lauseen 9.1.1 oletukset täytetty ja $x \in (\underline{x}, \mu_T)$. Silloin

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) \leq e^{-xc^*(1/x)U_0} \tag{9.1.3}$$

kaikilla $U_0 > 0$ ja

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \le xU_0) = -xc^*(1/x). \tag{9.1.4}$$

Lauseen 9.1.1 todistus. Tapahtuma $\{T = n\}$ voidaan esittää muodossa

$$\{T = n\} = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n\},$$

missä B_n on $\mathbb{R}^n$:n Borel-joukko,

$$B_n = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_1 \le U_0, v_1+v_2 \le U_0, \dots, v_1+\cdots+v_{n-1} \le U_0, v_1+\cdots+v_n > U_0\}.$$

Tehdään muuttujiin $\xi_1, \dots, \xi_n$ konjugaattimuunnos parametrilla R riippumattomuus säilyttäen. Voidaan myös ajatella, että otetaan käyttöön jono $\xi_1, \xi_2, \dots$ P_R-jakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka kaikki on määritelty samalla todennäköisyyskentällä. Tällöin mitalliselle suorakulmiolle $A_1 \times \cdots \times A_n$ pätee

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) \\ = \; & \mathbb{P}(\xi_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(\xi_n \in A_n) \\ = \; & \mathbb{E}_R\left(e^{-R\xi_1 + c(R)} \mathbb{1}(\xi_1 \in A_1)\right) \cdots \mathbb{E}_R\left(e^{-R\xi_n + c(R)} \mathbb{1}(\xi_n \in A_n)\right) \end{aligned}$$

Lemman 9.1.1 nojalla $c(R) = 0$. Riippumattomuudesta seuraa, että

$$\mathbb{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{E}_R\left(e^{-R(\xi_1 + \cdots + \xi_n)} \mathbb{1}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n)\right).$$

Välttämättä samanmuotoinen esitys pätee kaikille $\mathbb{R}^n$:n Borel-joukoille. Erityisesti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n) \\ &= \mathbb{E}_R\left(e^{-R(\xi_1 + \cdots + \xi_n)} \mathbb{1}((\xi_1, \dots, \xi_n) \in B_n)\right) \\ &= \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_n} \mathbb{1}(T = n)\right). \end{aligned}$$

Koska $Y_T > U_0$ alueessa $T < \infty$, niin

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < \infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_n} \mathbb{1}(T = n)\right) \\ &= \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_T} \mathbb{1}(T < \infty)\right) \\ &\le \mathbb{E}_R\left(e^{-RU_0} \mathbb{1}(T < \infty)\right) \\ &= e^{-RU_0} \mathbb{P}_R(T < \infty) \le e^{-RU_0}. \end{aligned}$$

Tämä todistaa (9.1.1):n (todettakoon, että yllä viimeinen epäyhtälö on itse asiassa yhtälö, sillä $\mathbb{E}_R(\xi_1) = c'(R) > 0$; suurten lukujen lain nojalla $\mathbb{P}_R(T < \infty) = 1$).

Olkoon $y > 0$ kiinteä ja $N = N(U_0) = \lfloor yU_0 \rfloor + 1$. Selvästi

$$\{Y_N > U_0\} \subseteq \{T < \infty\},$$

joten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T < \infty) &\geq \mathbb{P}(Y_N > U_0) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Y_N}{N} > \frac{U_0}{\lfloor yU_0 \rfloor + 1}\right) \geq \mathbb{P}\left(\frac{Y_N}{N} > \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Cramérin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) &\geq \liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{Y_N}{N} > \frac{1}{y}\right) \\ &= y \liminf_{U_0 \to \infty} N^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{Y_N}{N} > \frac{1}{y}\right) \geq -y \inf_{v > 1/y} c^*(v). \end{aligned}$$

Valitaan nyt $y > 0$ siten, että saatu alaraja on mahdollisimman suuri. Saadaan arvio

$$\begin{aligned} & \liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \\ \geq\ & -\inf_{y > 0} \{y \inf(c^*(v) \mid v > 1/y)\} = -\inf_{v > 0} \{\inf(yc^*(v) \mid y > 1/v)\} \\ =\ & -\inf_{v > 0} (c^*(v)/v) = -\inf_{y > 0} (yc^*(1/y)). \end{aligned}$$

Valitsemalla $y = \mu_T$ saadaan myös arvio alaspäin. Lemman 6.3.3.1 nojalla tällöin

$$yc^*(1/y) = \frac{c^*(c'(R))}{c'(R)} = \frac{Rc'(R) - c(R)}{c'(R)} = R.$$

Siis

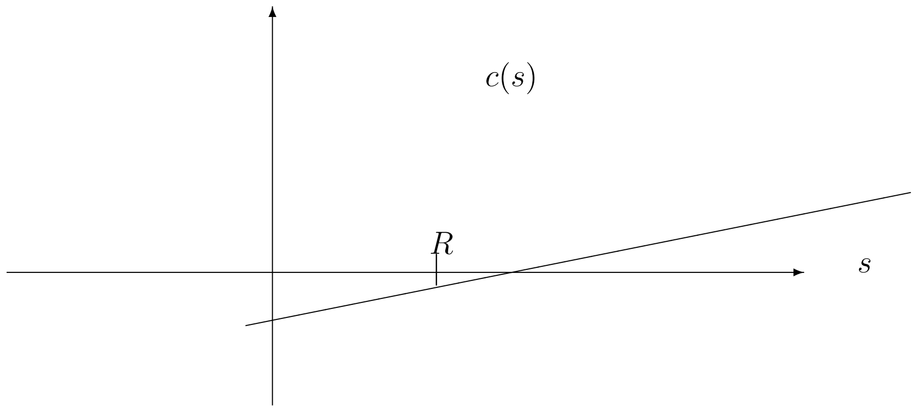
$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \geq -R.$$

Ylärajan (9.1.1) nojalla

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R.$$

Tulokset yhdessä todistavat raja-arvon (9.1.2). □

Alarajan todistusta havainnollistaa seuraava kuva.



Kuvassa tangentin kulmakerroin olkoon $1/y$. Tällöin tangentin ja vaaka-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta on $yc^*(1/y)$. Lyhin etäisyys on R ja se saavutetaan, kun $1/y = c'(R)$.

Lauseen 9.1.2 todistus. Siirrytään kuten edellisen lauseen todistuksessa konjugaattijakaumaan käyttäen nyt kuitenkin lemman 9.1.1 mukaista parametria s_x. Saadaan

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) = \mathbb{E}_{s_x}\left(e^{-s_x Y_T + Tc(s_x)}\mathbb{1}(T \leq xU_0)\right).$$

Ilmeisesti $c(s_x) \geq 0$, joten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq xU_0) &\leq e^{-s_x U_0 + xU_0 c(s_x)}\,\mathbb{P}_{s_x}(T \leq xU_0) \\ &\leq e^{-x(s_x/x - c(s_x))U_0} = e^{-xc^*(1/x)U_0}. \end{aligned}$$

Saatiin (9.1.3)

Olkoon nyt $y \in (0, x)$ kiinteä. Kun y on riittävän lähellä x:ää, on aidon konveksisuuden nojalla $y = 1/c'(s_y)$ eräälle $s_y > s_x$. Nyt

$$\{Y_{\lfloor yU_0 \rfloor + 1} > U_0\} \subseteq \{T \leq xU_0\},$$

kun U_0 on riittävän suuri. Cramérin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} &\liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq xU_0) \\ \geq\ &\liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\lfloor yU_0\rfloor+1}}{\lfloor yU_0\rfloor + 1} > \frac{1}{y}\right) \\ \geq\ &-y \inf_{v>1/y} c^*(v). \end{aligned}$$

Ilmeisesti

$$\inf_{v>1/y} c^*(v) = c^*(1/y),$$

kun y on riittävän lähellä x:ää, sillä c^* on äärellinen pisteen $1/x$ ympäristössä ja siis konveksina jatkuva. Saadaan

$$\begin{aligned} & \liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T \le xU_0) \\ \ge & -\lim_{y\to x-} (yc^*(1/y)) = -xc^*(1/x). \end{aligned}$$

Raja-arvo (9.1.4) seuraa tästä ja ylärajasta (9.1.3). □

Edellä esitettyihin tuloksiin liittyy läheisesti seuraavaksi todistettava ehdollinen suurten lukujen laki.

Lause 9.1.3. Lemman 9.1.1 oletuksin ja merkinnöin kaikilla $\epsilon > 0$,

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}(\mid T/U_0 - \mu_T \mid\le \epsilon \mid T < \infty) = 1.$$

Todistus. Olkoon $x > \mu_T$. Siirrytään jälleen konjugaattijakaumaan käyttäen lemman 9.1.1 mukaista parametria s_x. Saadaan

$$\mathbb{P}(xU_0 \le T < \infty) = \mathbb{E}_{s_x}\left(e^{-s_xY_T+Tc(s_x)}\mathbb{1}(xU_0 \le T < \infty)\right).$$

Nyt $s_x < R$ ja $c(s_x) < 0$, joten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(xU_0 \le T < \infty) &\le e^{-s_xU_0+xU_0c(s_x)}\,\mathbb{P}_{s_x}(xU_0 \le T < \infty) \\ &\le e^{-xc^*(1/x)U_0}. \end{aligned}$$

Olkoon h kuten lemmassa 9.1.1. Kun ϵ on pieni, saadaan yhdistämällä edellä saatu arvio lauseeseen 9.1.2

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\mathbb{P}(T < (\mu_T - \epsilon)U_0)}{\mathbb{P}(T < \infty)} + \frac{\mathbb{P}(\mid T/U_0 - \mu_T \mid\le \epsilon)}{\mathbb{P}(T < \infty)} + \frac{\mathbb{P}((\mu_T + \epsilon)U_0 < T < \infty)}{\mathbb{P}(T < \infty)} \\ &\le \frac{e^{-h(\mu_T-\epsilon)U_0}}{\mathbb{P}(T < \infty)} + \frac{\mathbb{P}(\mid T/U_0 - \mu_T \mid\le \epsilon)}{\mathbb{P}(T < \infty)} + \frac{e^{-h(\mu_T+\epsilon)U_0}}{\mathbb{P}(T < \infty)}. \end{aligned}$$

Ensimmäinen ja viimeinen termi suppenevat kohti nollaa lemman 9.1.1 ja lauseen 9.1.1 nojalla, josta lauseen väite seuraa. □

Tarkastellaan lopuksi mallia, jossa varmuuslisä on nolla.

Lause 9.1.4. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja tappioprosessi $\{Y_n\}$ kuten edellä. Oletetaan, että $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\xi)$ on äärellinen ja että $\mathbb{E}(\xi) = 0$. Silloin $\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = 1$ kaikilla alkupääomilla $U_0 > 0$. Jos lisäksi $c(s)$ on äärellinen jossain origon ympäristössä, niin $\mathbb{E}(T(U_0)) = \infty$.

Lausetta voidaan pitää perusteluna positiiviselle varmuuslisälle, vaikkakin nollavarmuuslisällä vararikkoa saadaan odottaa kauan.

Lauseen 9.1.4 todistus. Olkoon $U_0 > 0$. Keskeisen raja-arvolauseen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > U_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{U_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > U_0) = \frac{1}{2}. \tag{9.1.5}$$

Tehdään vastaoletus, että olisi $\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \leq a < 1$ eräälle $U_0 > 0$. Merkitään

$$V(U_0) = (Y_{T(U_0)} - U_0)\mathbb{1}(T(U_0) < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_n - U_0)\mathbb{1}(T(U_0) = n).$$

Selvästi $V(U_0)$ on satunnaismuuttuja. Kiinnitetään $\alpha \in (a, 1)$ ja $\epsilon > 0$. Olkoon edelleen v_0 sellainen, että $\mathbb{P}(V(U_0) > v_0) < \epsilon$. Silloin

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty) \\
= \; & \mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty, V(U_0) \leq v_0) + \mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty, V(U_0) > v_0) \\
\leq \; & \mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty, V(U_0) \leq v_0) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\{T(v_0 + 2U_0) < \infty, V(U_0) \leq v_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T(U_0) = n, Y_n - U_0 \leq v_0, T(v_0 + 2U_0) < \infty\}$$

$$\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T(U_0) = n, Y_n - U_0 \leq v_0, \xi_{n+1} + \cdots + \xi_{n+j} > U_0 \text{ jollain } j \geq 1\},$$

joten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty, V(U_0) \leq v_0) \;&\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T(U_0) = n, Y_n - U_0 \leq v_0)\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \\
&=\; \mathbb{P}(T(U_0) < \infty, V(U_0) \leq v_0)\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) \leq a^2.
\end{aligned}$$

Siis

$$\mathbb{P}(T(v_0 + 2U_0) < \infty) \leq a^2 + \epsilon.$$

Valitsemalla erityisesti $\epsilon = a(\alpha - a)$ ja merkitsemällä $U_1 = v_0 + 2U_0$ saadaan

$$\mathbb{P}(T(U_1) < \infty) \leq \alpha a.$$

Toistamalla päättely lähtien liikkeelle tästä ylärajasta löydetään alkupääoma U_2, jolle

$$\mathbb{P}(T(U_2) < \infty) \leq \alpha^2 a.$$

Näin jatkamalla saadaan ristiriita tulokselle (9.1.5). Siis $\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = 1$.

On osoitettava vielä, että $\mathbb{E}(T(U_0)) = \infty$. Selvästi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T(U_0)) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k).
\end{aligned}$$

Koska $\mathbb{E}(\xi) = 0$, on välttämättä

$$c(s) > 0 \quad \text{ja} \quad c'(s) > 0,$$

kun $s \in (0, h)$ ja $h > 0$ on riittävän pieni. Kun x on riittävän suuri, voidaan määrätä sellainen $s_x \in (0, h)$, että $c'(s_x) = 1/x$. Nähdään kuten lauseessa 9.1.2, että

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) \leq e^{-xc^*(1/x)U_0}.$$

Siispä

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T(U_0)) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(T \leq k - 1)) \\
&\geq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(1 - e^{-kc^*(U_0/k)}\right),
\end{aligned}$$

kun k_0 on riittävän suuri. Väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että

$$\lim_{x \to \infty} x \left(1 - e^{-xc^*(U_0/x)}\right) > 0. \qquad (9.1.6)$$

Ilmeisesti $t_x \to 0+$, kun $x \to \infty$, joten

$$\begin{aligned}
c(t_x) &= c(0) + c'(0)t_x + (c''(0)/2 + o(1))t_x^2 \\
&= (c''(0)/2 + o(1))t_x^2.
\end{aligned}$$

Koska

$$(c')^{-1}(0) = 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial (c')^{-1}(y)}{\partial y}_{|y=0} = \frac{1}{c''(0)},$$

niin

$$\begin{aligned} t_x &= (c')^{-1}(U_0/x) \\ &= \left(\frac{1}{c''(0)} + o(1)\right)\frac{U_0}{x}, \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Nähdään, että $xc^*(U_0/x) \to 0$, kun $x \to \infty$. Hospitalin säännön ja lemman 9.1.1 nojalla raja-arvo (9.1.6) on

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} \frac{U_0 e^{-xc^*(U_0/x)} \frac{\partial}{\partial x}(xc^*(U_0/x)/U_0)}{-1/x^2} \\ = &\lim_{x\to\infty} \frac{c(t_x)e^{-xc^*(U_0/x)}}{1/x^2}, \end{aligned}$$

missä $c'(t_x) = U_0/x$. Siis raja-arvo on $U_0^2/(2c''(0)) > 0$. □

9.2 Pitkän aikavälin malleista ja vararikkotodennäköisyyksien simuloinnista

Realistisuuden parantamiseksi on tarvetta tarkastella klassisen mallin laajennuksia. Olkoon yhtiötasolla

$$\begin{aligned} P_n &= \text{vuoden } n \text{ vakuutusmaksut jälleenvakuuttajan osuudella vähennettynä,} \\ X_n &= \text{vuoden } n \text{ kokonaisvahinkomäärä jälleenvakuuttajan osuudella vähennettynä,} \\ I_n &= \text{vuoden } n \text{ sijoitustoiminnan nettotuotto,} \\ E_n &= \text{vuoden } n \text{ liikekulut.} \end{aligned}$$

Solvenssimarginaalilla U_n vuoden n lopussa tarkoitetaan yhtiön varojen ja velkojen erotusta. Olkoon U_0 deterministinen. Tällöin

$$U_{n+1} = U_n + P_{n+1} + I_{n+1} - X_{n+1} - E_{n+1}.$$

Käsitteen sisältö vaihtelee jonkin verran eri lähteissä. Tässä termillä tarkoitetaan 'todellista' velat ylittävää varallisuutta. Erityisesti sijoitustoiminnan tuotot sisältävät myös omaisuuden arvonmuutokset ja kokonaisvahinkomäärä on ymmärrettävä kyseisenä vuotena *sattuneiden* vahinkojen korvausmääräksi (usein X_n = vuonna n maksetut korvaukset lisättynä korvausvastuun muutoksella). Erä E_n sisältää varsinaisten liikekulujen lisäksi erinäisiä sekalaisia osia, esimerkiksi yhtiön maksamia veroja ja osinkoja. Tätä erää ei käsitellä jatkossa lähemmin.

Esitellään esimerkin omaisesti merkityksellisiä ilmiöitä ja näiden mallinnusta pitkän aikavälin tarkasteluissa. Tavoitteeksi asetetaan 'mahdollisten' tulevaisuuksien hahmottaminen ja arviointi. Tämän tyyppisellä lähestymistavalla saadaan käsitys vararikkotodennäköisyyksiin vaikuttavista tekijöistä ainakin suuruusluokkatasolla. Parametrien valinnoissa nojaudutaan tavallisesti historiatietoihin. Tarkasteltavissa mutkikkaissa malleissa osien ja parametrien vaikutusta vararikkotodennäköisyyksiin pystytään arvioimaan lähinnä simuloinnin avulla.

Kokonaisvahinkomäärä Otetaan lähtökohdaksi yhdistetty Poisson-jakauma. Olkoon vuoden nolla Poisson-parametri λ ja kuvatkoon Z yksittäisen vahingon suuruutta. Olkoot vuoden n vastaavat suureet λ_n ja Z_n (λ_n on tässä stokastinen ja Z_n geneerinen vuoden n yksittäisen vahingon suuruutta kuvaava muuttuja). Kokonaisvahinkomäärä X_n tulee seuraavassa noudattamaan ehdollisesti yhdistettyä Poisson-jakaumaa ehdolla $\sigma(\lambda_n, Z_n)$.

Liikkeen *reaalikasvu* on luontevaa mallintaa Poisson-parametrin kasvuksi. Tällöin

$$\lambda_n = \lambda \prod_{k=1}^{n} r_k,$$

missä r_k on vuoden k kasvukerroin. Usein r_k oletetaan keskimäärältään ykköstä suuremmaksi.

Vuotuinen heilahtelu Poisson-parametrissa otetaan huomioon struktuurimuuttujan avulla kuten jo aiemmin on esitetty. Olkoot $Q_1, Q_2, \ldots$ kyseiset peräkkäisten vuosien muuttujat. Nämä oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi. Tällöin

$$\lambda_n = \lambda Q_n \prod_{k=1}^{n} r_k.$$

Taloudellisten *syklien* aiheuttama aaltoilu mallinnetaan myös Poisson-parametriin. Tällöin

$$\lambda_n = \lambda Q_n (1 + s_n) \prod_{k=1}^{n} r_k,$$

missä s_n kuvaa poikkeamaa normaalitasosta. Yksinkertaisimmillaan s_n voisi olla deterministinen siniaalto

$$s_n = s_0 \sin(\varphi n + \phi),$$

missä s_0, φ ja ϕ ovat vakioita. Stokastinen malli voisi olla autoregressiivinen prosessi,

$$s_n = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \epsilon_n,$$

missä a_1 ja a_2 ovat vakioita ja $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona nolla. Jos karakteristisen yhtälön $1 - a_1 x - a_2 x^2 = 0$ juuret ovat kompleksiset, ilmenee realisaatioissa syklisyyttä. Yleensä oletetaan myös, että juuret ovat itseisarvoltaan ykköstä suurempia. Tämä pitää prosessin 'rajoitettuna'.

Katastrofit aiheuttavat siksi suuria poikkeamia vahinkomääriin, että niitä on syytä tarkastella erikseen. Esimerkkeinä mainittakoon maanjäristykset ja hirmumyrskyt. Näissä yksittäinen ilmiö aiheuttaa vahinkotapahtumia usealle osapuolelle. Erityispiirteenä on lisäksi se, että syntyvien suurten korvausvaateiden takia jälleenvakuutussuojat saattavat pettää. Toisin sanoen katastrofin seurauksena osa jälleenvakuuttajista tekee vararikon. Mikäli yhtiö itse vastaanottaa jälleenvakuutusta, on huomattava lisäksi se, että katastrofin seurauksena korvausvaatimuksia tulee usealta suunnalta, nimittäin ensivakuuttajilta ja näiden jälleenvakuuttajilta.

Korvausvastuuennusteen osoittautuminen riittämättömäksi on myös merkittävä riskitekijä. Vajaus voi johtua virheellisestä korvausvastuun tasoarviosta tai puhtaasti sattumasta. Esimerkiksi korkea inflaatio voi nostaa jo sattuneiden vahinkojen tulevat korvaukset ennakoitua suuremmiksi. Samoin tietysti vahinkojen odotettua hitaampi selviäminen. Alimitoitettu korvausvastuuennuste merkitsee sitä, että yhtiö aliarvioi velkojaan ja siis yliarvioi solvenssimarginaaliaan. Käsitys yhtiön vakavaraisuudesta on tällöin turhan optimistinen.

Inflaation vaikutus on luontevaa mallintaa koskemaan vahinkojen suuruuksia. Inflaation itsensä mallintamiseksi tarkastellaan vuoden n *inflaatioastetta* i_n. Tämä kuvaa hintojen suhteellista muutosta. Olkoon vuoden n hintataso h_n. Tämä voisi olla esimerkiksi sopivan tuotekorin todellinen hinta. Määritellään

$$1 + i_n = \frac{h_{n+1}}{h_n}.$$

Wilkien mallissa (Wilkie (1986)) inflaatioasteella on kiinteä perustaso i, johon on 'imua'. Hinnoilla sen sijaan ei ole imua entiselle tasolleen. Mallissa asetetaan

$$\log(1 + i_n) - i = a\left(\log(1 + i_{n-1}) - i\right) + \epsilon'_n,$$

missä $a \in (0, 1)$ ja $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Voisi olla esimerkiksi $i \approx 0.03$. Todettakoon, että inflaatio edellä tulee ymmärtää korvausinflaatioksi. Tämä poikkeaa 'tavallisesta' inflaatiosta ja voi olla erilainen eri vakuutuslajeilla. Kun inflaatioasteet on mallinnettu, asetetaan

$$Z_n = (1 + i_1) \cdots (1 + i_n) Z.$$

Monet edellä esitetyistä seikoista merkitsevät luopumista vuotuisten kokonaisvahinkomäärien riippumattomuusoletuksesta. Esimerkiksi reaalikasvu, syklit ja inflaatio ovat tällaisia. Samoin eri vakuutuslajit riippuvat toisistaan ainakin inflaation välityksellä, sillä ns. tavallinen inflaatio heijastuu jollain painolla lajeittaisiin korvausinflaatioihin.

Vakuutusmaksut Vakuutusmaksut sisältävät yhtenä osana riskimaksun. Näin ollen edellä kuvatut vahinkoihin vaikuttavat tekijät periytyvät myös maksuihin, yleensä kuitenkin tasoitettuna. Usein vakuutusmaksut perustuvat lähihistorian vahinkomääriin. Vaikutukset maksuihin tulevat tästä syystä viiveellä. Todettakoon, että eri vuosien vakuutusmaksut eivät yleensä ole riippumattomia, vaikka vuotuiset kokonaisvahinkomäärät sitä olisivatkin. Tämä johtuu siitä, että yksittäisen vuoden vahingot osallistuvat tavallisesti riskimaksujen estimoimiseen monena vuotena.

Markkinavoimat vaikuttavat yhtenä tekijänä vakuutusmaksuihin. Yhtiön maksutaso ei voi olla oleellisesti muiden yhtiöiden tason yläpuolella, sillä tällöin yhtiö menettäisi vakuutuskantansa. Myöskään taso ei voi olla paljon markkinoiden tason alapuolella ilman että vakavaraisuus vaarantuisi.

Merkittävää korvausvastuuta muodostavissa vakuutuslajeissa sijoitustoiminta vaikuttaa vakuutusmaksuihin. Koska yhtiö saa vakuutusmaksut ennen korvausten maksamista, voidaan näille odottaa sijoitustuottoja. Näin ollen vakuutusmaksutasoksi riittää liikekuluja ja realisoituvia korvaussuorituksia pienempi määrä.

Sijoitustoiminnan tuotot Korvausvastuun muodostuminen merkitsee sitä, että yhtiöllä tulee olla hallussaan varoja myöhempiä korvaussuorituksia varten. Tämä tekee sijoitustoiminnasta vakuutustoiminnan tärkeän osa-alueen. Kuten edellä todettiin, tällä on vaikutusta myös vakuutusmaksujen määrätymiseen. Vakavaraisuuden näkökulmasta on myös tärkeää ottaa huomioon sijoitustoimintaan liittyvät riskit. Esimerkiksi pörssiromahdus saattaa viedä yhtiön nopeasti vaikeuksiin, jos osakkeiden osuus *sijoitussalkusta* on merkittävä. Tämän tyyppisiä riskejä vastaan voidaan osaksi suojautua *hajauttamalla* omaisuutta eri sijoituslajeihin. Toisen tyyppinen riski liittyy *maksuvalmiuteen* (likviditeettiin). Sijoituksista syntyvien rahavirtojen tulisi vastata kohtuullisella tarkkuudella korvaussuoritusten realisoitumista myös ajallisesti. Selvimmin tämä tulee esiin vakuutuslajin (tai koko yhtiön) lopettamisen yhteydessä. Tällöin vakuutusmaksut loppuvat nopeasti, mutta korvaussuoritukset voivat jatkua vuosikymmeniä. Sijoitusomaisuutta joudutaan realisoimaan korvausten tahdissa. Tämä voi johtaa epäedullisiin pakkorealisointeihin, elleivät sijoitusomaisuus ja korvausvastuu ole tasapainossa rahavirtojen purkautumisnopeuden osalta.

Sijoitustoiminnan tuottojen mallintamisessa on järkevää tarkastella sijoituksia omaisuuslajeittain. Esimerkkejä lajeista ovat pankkitalletukset, kiinteistöt, pörssiosakkeet ja lainat. Niinikään on järkevää tarkastella erikseen *käteistuottoja* ja *arvonnousuja*. Esimerkiksi pörssiosakkeille saadaan käteistuottona osinkoja. Osakkeen kurssinousu on taas arvonnousua. Tämä voidaan realisoida myymällä osake pörssissä.

Sijoitustoiminnan tuottojen mallinnuksessa nojaudutaan usein autoregerssiivisiin prosesseihin. Tarkastellaan esimerkin omaisesti käteistuottoja, kts. DPP, sivu 256. Lähdetään liikkeelle omaisuuden markkina-arvosta. Olkoon tämä A_n vuonna n. Markkina-arvon määrittely voi jo sinänsä olla ongelma, mutta otetaan se tässä annettuna. Esitetään käteistuotto J_n muodossa

$$J_n = j_n A_n.$$

Mallinnetaan

$$j_n - j = \alpha(j_{n-1} - j) + \epsilon''_n,$$

missä j on tuottokertoimen j_n perustaso, $0 < \alpha < 1$ ja $\epsilon''_1, \epsilon''_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Mallissa inflaation vaikutus käteistuottoihin tulee arvojen A_n kautta, joten j_n kuvaa lähinnä reaalituottoa.

Simulointiesimerkki Tarkastellaan seuraavaa mallia:

a) Vuoden n kokonaisvahinkomäärä X_n noudattaa ehdollisesti yhdistettyä Poisson-jakaumaa siten, että Poisson-parametri on $\lambda_n = \lambda Q_n(1 + s_n) \prod_{k=1}^{n} r_k$, missä $\lambda > 0$ on vakio ja $Q_1, Q_2, \ldots$ ovat riippumattomia vuotuisia struktuurimuuttujia kertymäfunktiona H. Määräytykööt syklimuuttujat ehdosta

$$s_n = a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \epsilon_n,$$

missä a_1, a_2, s_{-1} ja s_0 ovat vakioita ja $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ toisistaan ja struktuurimuuttujista riippumattomia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ ovat myös samoin jakautuneita. Lopuksi oletetaan, että kasvukerroin $r_n = r$ on vakio. Yksittäisen vahingon suuruudet oletetaan jakautuneiksi kuten $(1 + i_1) \cdots (1 + i_n)Z$, missä Z:n kertymäfunktio on S. Inflaatioasteet i_n määrätyvät Wilkien mallista,

$$\log(1 + i_n) - i = a\left(\log(1 + i_{n-1}) - i\right) + \epsilon'_n,$$

missä $a \in (0, 1)$ ja $\epsilon'_1, \epsilon'_2, \ldots$ ovat samoin jakautuneita ja riippumattomia toisistaan sekä muuttujista $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ ja $Q_1, Q_2, \ldots$. Lisäksi i_0 oletetaan vakioksi.

b) Vuoden n vakuutusmaksu B_n määräytyy ehdosta

$$\begin{aligned} P_n &= (\alpha X_{n-1} + (1 - \alpha)P_{n-1})(1 + i), \\ B_n &= (1 + v)P_n, \end{aligned}$$

missä $v > 0$ on varmuuslisä, $\alpha \in (0, 1)$ ns. tasoitusparametri ja P_1 vakio.

Olkoon alkupääoma U_0. Estimoidaan vararikkotodennäköisyyttä $\mathbb{P}(T \leq 10)$ simuloimalla. Vuoden n lopussa varallisuus on

$$U_n = U_0 + \sum_{i=1}^{n} (B_i - X_i).$$

Tuotetaan simuloinnin avulla realisaatioita satunnaisvektorista $(U_1, \ldots, U_{10})$. Mikäli jokin U_i on negatiivinen j. realisaatiossa, asetetaan $T_j = 1$. Muuten asetetaan $T_j = 0$. Suoritetaan N toistoa ja estimoidaan

$$\mathbb{P}(T \leq 10) \approx N^{-1} \sum_{j=1}^{N} T_j.$$

Simuloinnin toteutus voisi olla seuraava.

1) Tuotetaan havainto struktuurimuuttujasta Q_1.

2) Tuotetaan havainto muuttujasta ϵ_1 ja määrätään s_1 kaavasta $s_1 = a_1 s_0 + a_2 s_{-1} + \epsilon_1$.

3) Poisson-parametri on nyt $\lambda_1 = \lambda Q_1(1+s_1)r$. Tuotetaan havainto Poisson-jakaumasta tällä parametrilla. Olkoon tämä K_1.

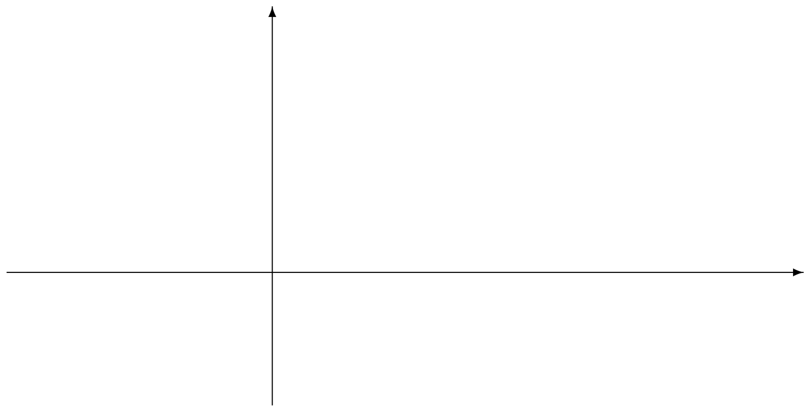
4) Tuotetaan havainto muuttujasta ϵ_1' ja määrätään inflaatioaste yhtälöstä $\log(1+i_1) = i + a(\log(1 + i_0) - i) + \epsilon_1'$.

5) Tuotetaan K_1 havaintoa jakaumasta S_1: $S_1(z) = S\left(\frac{z}{1+i_1}\right)$.

6) Määrätään X_1 näiden summana.

Seuraavan vuoden kokonaisvahinkomäärä X_2 määrätään vastaavasti. Toteutuksessa käytetään vuoden 1 havaintoja s_1 ja i_1 syklin ja inflaatioasteen generoinnissa. Näin jatkaen saadaan vahinkomääriä koskeva vektori $(X_1, \ldots, X_{10})$. Tämä määrää myös vakuutusmaksurealisaation $(B_1, \ldots, B_{10})$ ja vararikkoindikaattori T_1 voidaan muodostaa. Vastaavasti määrätään $T_2, \ldots, T_N$, kunnes otos voidaan katsoa riittävän suureksi todennäköisyyden $\mathbb{P}(T \leq 10)$ estimoimiseen.

Ilmeistä on, että menettelyllä saadaan harhattomia estimaatteja vararikkotodennäköisyydelle. Pysäytyssääntö voidaan nytkin perustaa keskeiseen raja-arvolauseeseen. Menettely on melko raskas, jos Poisson-parametri on suuri. Havainnollisuutta tuloksiin saadaan piirtämällä realisaatiot:



Lähde: Pentikäinen et al. (1989). Kuva ei perustu edellä tarkasteltuun esimerkkiin.

10 Vakuuttaminen utiliteettiteorian näkökulmasta

Vakuutuksenottaja on odotusarvomielessä tavallisesti häviävänä osapuolena vakuutussopimuksessa. Jos nimittäin X on vakuutetun kokonaisvahinkomäärä ja P tätä vastaava vakuutusmaksu, niin yleensä $P > \mathbb{E}(X)$. Tämä johtuu siitä, että yhtiö sisällyttää vakuutusmaksuun positiivisen varmuuslisän (ja myöskin erän hallintokustannuksia varten). Vakuutuksen ottaminen vaikuttaa tässä mielessä epärationaaliselta. Voidaan siis kysyä vakuutuksenottajan motiivia. Laajemmin voidaan kysyä, mitä riskejä halutaan vakuuttaa ja mistä hinnasta. Tässä luvussa kysymystä tarkastellaan *utiliteettiteorian* näkökulmasta.

Tarkastellaan johdannoksi ns. *Pietarin paradoksia.* Heitetään tasapainoista rahaa, kunnes tulee ensimmäinen klaava. Jos tämä tulee n. heitolla, pelaaja A maksaa 2^{n-1} euroa pelaajalle B. Mistä hinnasta pelaaja B on valmis myymään oikeutensa osallistua peliin?

Olkoon V pelaajan B saama rahamäärä pelissä. Tällöin

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = +\infty.$$

Mikäli hinta olisi *odotusarvoperiaatteen* mukainen eli $\mathbb{E}(V)$, ei B myisi oikeuttaan mistään hinnasta. Useimmat kuitenkin luopuisivat oikeudestaan esimerkiksi tuhannella eurolla.

10.1 Utiliteetin käsite ja utiliteettifunktiot

Utiliteettiteoriassa varallisuudesta saatavaa *hyötyä* mitataan henkilön (tai esimerkiksi yrityksen) *utiliteettifunktion* avulla. Varallisuutta sinänsä ei voida pitää odotusarvomielessä tyydyttävänä mittarina ainakaan suurten rahasummien ollessa kyseessä. Luonnolliselta tuntuu kuitenkin, että hyöty on sitä suurempi mitä suurempi on varallisuus. Myös voidaan ajatella, että varallisuuden lisäyksestä saatava hyöty on sitä pienempi mitä suurempi on varallisuus ennen lisäystä. Tätä kutsutaan *vähenevän rajahyödyn periaatteeksi.*

Kuvataan varallisuudesta saatavaa hyötyä utiliteettifunktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avulla. Varallisuuden v hyöty on siis $u(v)$. Edellä esitetyn nojalla voidaan olettaa, että u on kasvava. Vähenevän rajahyödyn periaatteen mukaisesti oletetaan, että funktio $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g_t(v) = u(v+t) - u(v) \tag{10.1.1}$$

on vähenevä jokaisella kiinteällä $t > 0$. *Stokastisen näkymän Y* hyöty tai *utiliteetti* määritellään odotusarvona $\mathbb{E}(u(Y))$ edellyttäen, että odotusarvo on olemassa. Erilaisia näkymiä verrataan niiden utiliteettien avulla: näkymä on sitä parempi mitä korkeampi on sen utiliteetti. Kriteeriä kutsutaan *utiliteetin odotusarvohypoteesiksi.*

Esimerkki 10.1.1. Olkoon $u(v) = v^p$ alueessa $v > 0$, missä $p \in (0,1)$. Pietarin paradoksin mukaisen pelin utiliteetti on

$$\mathbb{E}(u(V)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (2^{n-1})^p = \frac{1}{2-2^p}.$$

Olkoon P sellainen, että $u(P) = \mathbb{E}(u(V))$. Tällöin P on pelaajan B mielestä neutraali hinta pelioikeudesta luopumiselle mainitulla utiliteettifunktiolla.

Usein näkymien hyödyn sijasta ollaan kiinnostuneita vain eri näkymien hyötyjen järjestyksestä. Tähän tarkoitukseen annetun utiliteettifunktion u kanssa ekvivalentteja ovat utiliteettifunktiot $u_{a,b}$,

$$u_{a,b}(v) = au(v) + b,$$

missä $a > 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ ovat mielivaltaisia.

Lemma 10.1.1. Olkoon u kasvava ja (10.1.1):n mukainen funktio g_t vähenevä kaikilla $t > 0$. Silloin u on konkaavi ts.

$$u(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \geq \alpha u(v_1) + (1-\alpha)u(v_2) \text{ kaikilla } \alpha \in (0,1), v_1, v_2 \in \mathbb{R}. \tag{10.2.1}$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että u on jatkuva. Olkoon $v \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Koska u on kasvava, on olemassa raja-arvot

$$u(v-) = \lim_{w \to v-} u(w) \quad \text{ja} \quad u(v+) = \lim_{w \to v+} u(w).$$

Lisäksi $u(v-) \leq u(v+)$. On osoitettava, että $u(v+) \leq u(v-)$. Olkoon $w < v$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska $g_{\frac{v-w}{n}}$ on vähenevä, niin

$$\begin{aligned} u(v) &= u(w) + \sum_{k=1}^{n} \left[u\left(w + \frac{k(v-w)}{n}\right) - u\left(w + \frac{(k-1)(v-w)}{n}\right)\right] \\ &\geq u(w) + n\left[u\left(v + \frac{v-w}{2n}\right) - u\left(v - \frac{v-w}{2n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Siis

$$u\left(v + \frac{v-w}{2n}\right) - u\left(v - \frac{v-w}{2n}\right) \leq \frac{u(v)-u(w)}{n}.$$

Kun $n \to \infty$, lähenee oikea puoli nollaa ja vasen puoli erotusta $u(v+) - u(v-)$. Nähdään, että $u(v+) \leq u(v-)$.

Konkaavisuuden todistamiseksi tarkastellaan mielivaltaisia $v, w \in \mathbb{R}$, $w < v$. Oletusten nojalla

$$u\left(\frac{w+v}{2}\right) - u(w) \geq u(v) - u\left(\frac{w+v}{2}\right),$$

joten

$$u\left(\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}v\right) \geq \frac{1}{2}u(w) + \frac{1}{2}u(v).$$

Siis (10.2.1) pätee, kun $\alpha = 1/2$.

Olkoon

$$w = x_0 < x_1 \cdots < x_{2^n} = v, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{v-w}{2^n}.$$

Soveltamalla edellä saatua tulosta pareihin $(x_0, x_2), (x_1, x_3), \ldots$ todetaan, että pisteiden $(x_i, u(x_i)), i = 0, 1, \ldots, 2^n$, kautta kulkeva paloittain lineaarinen funktio on konkaavi. Koska u on jatkuva, suppenee näin syntyvä funktiojono pisteittäin kohti funktiota u. Näin ollen u on konkaavi konkaavien funktioiden pisteittäisenä raja-arvona. $\square$

10.2 Vakuutuksen hyöty

Oletetaan koko kappaleessa, että potentiaalisen vakuutetun ja yhtiön utiliteettifuktiot ovat molemmat konkaaveja. Tutkitaan utiliteetin odotusarvohypoteesin valossa, millä ehdoilla vakuutussopimuksia voi syntyä.

Tarkastellaan henkilöä, jonka varallisuus on a_0 ja utiliteettifunktio u. Kuvatkoon X (potentiaalisesti) vakuutettavaa kokonaisvahinkomäärää tarkasteltavana ajanjaksona. Oletetaan, että vakuutusyhtiö suostuu myymään vakuutuksen hintaan P. Miten suuri P voi olla, että henkilö ostaisi vakuutuksen?

Tarkastellaan kahta näkymää:

a) Ei vakuutusta

Henkilön varallisuus ajanjakson lopussa on $a_0 - X$. Tämän utiliteetti on

$$\mathbb{E}(u(a_0 - X)).$$

b) Vakuutus

Varallisuus on nyt $a_0 - P$ ja utiliteetti

$$\mathbb{E}(u(a_0 - P)) = u(a_0 - P).$$

Koska u on konkaavi, saadaan Jensenin epäyhtälöstä tulos

$$\mathbb{E}(u(a_0 - X)) \leq u\left(\mathbb{E}(a_0 - X)\right) = u\left(a_0 - \mathbb{E}(X)\right).$$

Utiliteetin odotusarvohypoteesin mukaan henkilö valitsee vakuutuksen ainakin, jos

$$P \leq \mathbb{E}(X),$$

sillä u on kasvava. Vakuutus valitaan mahdollisesti myös, jos $P > \mathbb{E}(X)$. Tämä tapahtuu, jos

$$u(a_0 - P) \geq \mathbb{E}(u(a_0 - X)). \tag{10.2.2}$$

Vaatimus voidaan kirjoittaa muotoon $P \leq \pi(a_0)$, missä

$$u(a_0 - \pi(a_0)) = \mathbb{E}(u(a_0 - X)).$$

Tällöin $\pi(a_0)$:aa kutsutaan vakuutuksenottajan *nollahyötyiseksi vakuutusmaksuksi*. Tavallisesti $\pi(a_0) > \mathbb{E}(X)$, jolloin vakuutuksesta voi olla hyötyä, vaikka se sisältääkin positiivisen varmuuslisän.

Tarkastellaan nyt asiaa vakuutusyhtiön näkökulmasta. Olkoon yhtiön alkuvarallisuus A_0 ja utiliteettifunktio U. Yhtiö suostuu myymään vakuutuksen hintaan P, jos

$$\mathbb{E}(U(A_0 + P - X)) \geq U(A_0).$$

Jensenin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(U(A_0 + P - X)) \leq U(A_0 + P - \mathbb{E}(X)).$$

Koska U on aidosti kasvava, ei yhtiö myy vakuutusta alle hinnan $\mathbb{E}(X)$. Olkoon $\varrho(A_0)$ sellainen, että

$$\mathbb{E}(U(A_0 + \varrho(A_0) - X)) = U(A_0).$$

Tällöin $\varrho(A_0)$ on vakuutusyhtiön *nollahyötyinen vakuutusmaksu*. Yhtiö myöntää vakuutuksen, jos $P \geq \varrho(A_0)$. Vakuutussopimus syntyy, jos

$$\varrho(A_0) \leq P \leq \pi(a_0).$$

Jos X voidaan katsoa vakuutusyhtiön näkökulmasta pieneksi siten, että U on X:n vaihteluvälillä likimain lineaarinen, $U(v) = \alpha v + \beta$, saadaan yhtiön vaatimus muotoon

$$\mathbb{E}(\alpha(A_0 + P - X) + \beta) \geq \alpha A_0 + \beta.$$

Tämä toteutuu, jos $P \geq \mathbb{E}(X)$. Näin ollen vakuutussopimuksen syntyminen näyttää mahdolliselta.

Viitteet

Bingham, N., C. Goldie, and J. Teugels (1987). *Regular variation.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Bucklew, J. A., P. Ney, and J. S. Sadowsky (1990). Monte Carlo simulation and large deviations theory for uniformly recurrent Markov chains. *J. Appl. Prob.* **27**, 44–59.

Dembo, A. and O. Zeitouni (1998). *Large Deviations Techniques and Applications* (2nd ed.). Berlin: Springer–Verlag.

Denuit, M., J. Dhaene, M. Goovaerts, and R. Kaas (2005). *Actuarial theory for dependent risks.* Wiley.

Ellis, R. S. (1984). Large deviations for a general class of random vectors. *Ann. Probab.* **12**, 1–12.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (2nd ed.), Volume II. New York: John Wiley and Sons.

Gärtner, J. (1977). On large deviations from the invariant measure. *Theory Prob. Appl.* **22**, 24–39.

Iscoe, I., P. Ney, and E. Nummelin (1985). Large deviations of uniformly recurrent Markov additive processes. *Adv. in Appl. Math.* **6**, 373–412.

Karlin, S. and H. Taylor (1975). *First course in Stochastic Processes.* Academic Press Inc.

Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder estimates. *Astin Bulletin* **23**, 213–225.

Mikosch, T. (2004). *Non-Life insurance mathematics.* Berlin: Springer-Verlag.

Norberg, R. (1993). Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *Astin Bulletin* **23**, 95–115.

Pentikäinen, T., H. Bonsdorff, M. Pesonen, J. Rantala, and M. Ruohonen (1989). *Insurance Solvency and Financial Strength.* Finnish Insurance Training and Publishing Company, Helsinki.

Rantala, J. (1984). *An application of stochastic control theory to insurance business.* PhD. Thesis. University of Tampere.

Ruohonen, M. (1988). Proceedings of international congress of actuaries, part 4. Helsinki.

Sundt, B. (1984). *An Introduction to Non-life Insurance Mathematics.* Karlsruhe: Verlag Vers. GmGH.

Wilkie, D. (1986). A stochastic investment model for actruarial use. *Transactions of Faculty of Actuarial Science* **39**.