missä

$$\hat{\alpha}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \quad \text{ja} \quad \hat{\eta}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2.$$

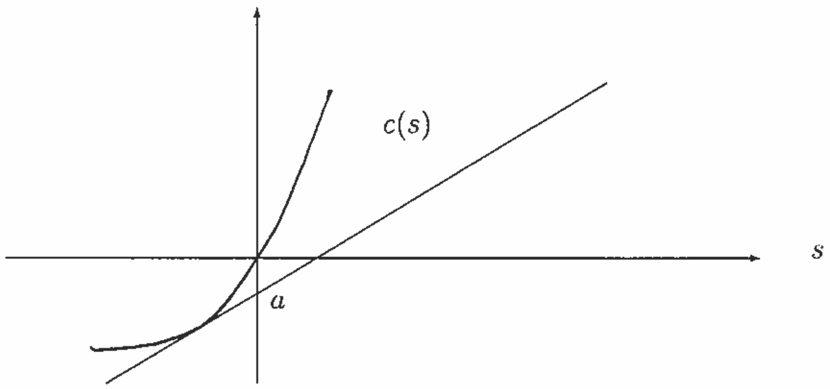
Yllä esitettyä mitan vaihtoon perustuvaa estimointia kutsutaan *kohdennetuksi simuloinniksi* (engl. importance sampling).

Suurten poikkeamien teoriaa Edellä esitetyn minimointiongelman ratkaisemisessa nojaudutaan *suurten poikkeamien teoriaan.* Esitetään seuraavassa muutamia tähän liittyviä käsitteitä ja tuloksia. Teoria katsotaan alkaneeksi vuonna 1938 ns. Cramérin lauseesta. Huomattavaa kehitystä on tapahtunut viime vuosikymmeninä. Mainittakoon esimerkkinä Gärtner-Ellisin lause, joka sallii riippuvuutta summattaville $\xi_1, \xi_2, \ldots$ (Gärtner (1977), Ellis (1984)).

Olkoot muuttujat $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ja $S_1, S_2, \ldots$ kuten kappaleen 6.3.3 alussa. Olkoon ξ-muuttujien yhteinen jakauma P. Määritellään funktion c_ξ *konveksi konjugaatti* c_ξ^* ehdosta

$$c_\xi^*(v) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{sv - c_\xi(s)\}.$$

Tällä on seuraava hyödyllinen geometrinen tulkinta.



Kuvassa c:n tangentin kulmakerroin on v. Konjugaattifunktion arvo $c^*(v)$ on tangentin ja pystyakselin leikkauspisteen a etäisyys origosta.

Lemma 6.3.3.1. Funktioilla c_ξ ja c_ξ^* on seuraavat ominaisuudet.

(i) Molemmat ovat konvekseja.
(ii) $c_\xi^*(v) \geq 0$ kaikilla $v \in \mathbb{R}$.
(iii) $c_\xi^*(\mu_\xi) = 0$.
(iv) Jos $c_\xi'(s_v) = v$ jollain $s_v \in \mathcal{D}$, niin $c_\xi^*(v) = s_v v - c_\xi(s_v)$.

Oletetaan, että $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon c näiden yhteinen kumulantit generoiva funktio,

$$c(s) = \log \mathbb{E}(e^{s\xi}), \quad s \in \mathbb{R},$$

ja

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\}.$$

Konveksi konjugaatti olkoon c^*,

$$c^*(v) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{sv - c(s)\}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Merkitään

$$\bar{s} = \sup\{s \in \mathbb{R} \mid c(s) < \infty\} \in [0, \infty]$$

ja

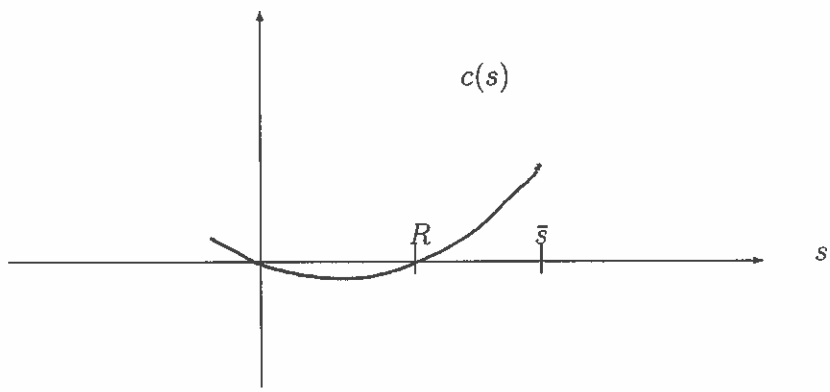
$$\underline{x} = \lim_{s \to \bar{s}-} \frac{1}{c'(s)}.$$

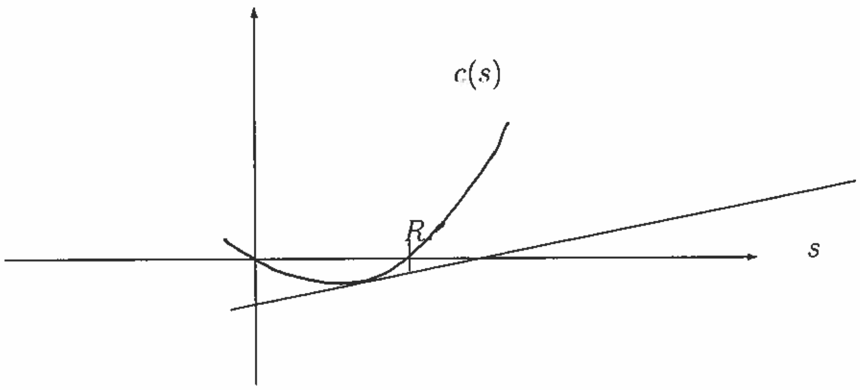
Raja-arvo on olemassa, koska c' on konveksisuuden nojalla kasvava. Määritellään kuvaus $h : (\underline{x}, \infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ehdosta

$$h(x) = xc^*(1/x).$$

Lemma 9.1.1. Olkoon $\mathbb{E}(\xi) < 0$ ja $\mathrm{Var}(\xi) > 0$. Oletetaan lisäksi, että $c(s) \in (0, \infty)$ jollain $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $R \in (0, \infty)$, jolle $c(R) = 0$. Jos $x \in (\underline{x}, \infty)$, niin on olemassa yksikäsitteinen $s_x \in (0, \bar{s})$ siten, että $c'(s_x) = 1/x$ ja lisäksi $h'(x) = -c(s_x)$. Olkoon $\mu_T = 1/c'(R)$. Silloin $h(\mu_T) = R$, h on aidosti vähenevä välillä $(\underline{x}, \mu_T]$ ja aidosti kasvava välillä $[\mu_T, \infty)$.

Parametria R kutsutaan *Lundbergin eksponentiksi*. Nimitys tulee seuraavan lauseen tuloksista. Oletus $\mathbb{E}(\xi) < 0$ merkitsee sovelluksen näkökulmasta sitä, että vakuutusmaksu sisältää positiivisen varmuuslisän.





Kuvassa tangentin kulmakerroin olkoon $1/y$. Tällöin tangentin ja vaaka-akselin leikkauspisteen etäisyys origosta on $yc^*(1/y)$. Lyhin etäisyys on R ja se saavutetaan, kun $1/y = c'(R)$.

Lauseen 9.1.2 todistus. Siirrytään kuten edellisen lauseen todistuksessa konjugaattijakaumaan käyttäen nyt kuitenkin lemman 9.1.1 mukaista parametria s_x. Saadaan

$$\mathbb{P}(T \leq xU_0) = \mathbb{E}_{s_x}\left(e^{-s_xY_T+Tc(s_x)}\mathbb{1}(T \leq xU_0)\right).$$

Ilmeisesti $c(s_x) \geq 0$, joten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq xU_0) &\leq e^{-s_xU_0+xU_0c(s_x)}\,\mathbb{P}_{s_x}(T \leq xU_0)\\ &\leq e^{-x(s_x/x-c(s_x))U_0} = e^{-xc^*(1/x)U_0}.\end{aligned}$$

Saatiin (9.1.3)

Olkoon nyt $y \in (0, x)$ kiinteä. Kun y on riittävän lähellä x:ää, on aidon konveksisuuden nojalla $y = 1/c'(s_y)$ eräälle $s_y > s_x$. Nyt

$$\{Y_{\lfloor yU_0\rfloor+1} > U_0\} \subseteq \{T \leq xU_0\},$$

kun U_0 on riittävän suuri. Cramérin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}&\liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1}\log\mathbb{P}(T \leq xU_0)\\ \geq\ &\liminf_{U_0\to\infty} U_0^{-1}\log\mathbb{P}\left(\frac{Y_{\lfloor yU_0\rfloor+1}}{\lfloor yU_0\rfloor+1} > \frac{1}{y}\right)\\ \geq\ &-y\inf_{v>1/y} c^*(v).\end{aligned}$$

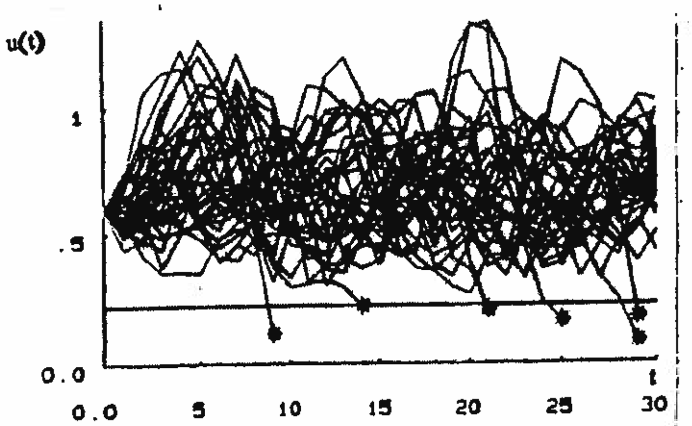


FIG. 4.3.1. Solvency ratio of the standard insurer. Forty realizations.

Lähde: Pentikäinen et al. (1989). Kuva ei perustu edellä tarkasteltuun esimerkkiin.