Riskiteorian laskuharjoitus 11, 12.12.2013

Huom. Harjoitus on poikkeuksellisesti to klo 14 salissa DK116.

Huom. Ke 11.12. on klo 12 harjoitusten tilalla luento, ke 11.12. klo 16 ei ole luentoa.

1. Vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti intensiteetifunktiolla $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$, missä

$$\lambda(t) = \lambda + \varepsilon \sin(2\pi t)$$

ja $0 < \varepsilon < \lambda$ ovat vakioita. Vahinkojen raportoitumisviiveet ovat toisistaan ja lukumääräprosessista riippumattomia välille $(0,1)$ tasan jakautuneita satunnaismuuttujia. Yksittäisen vahingon suuruus on vakio (=1) ja korvaus maksetaan aina kokonaisuudessaan heti, kun vahinko raportoituu yhtiöön. Yhtiö on aloittanut toimintansa hetkellä nolla. Määrää korvausvastuun odotusarvo hetkinä $n/2$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Olkoon yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäiset vahingot ovat eksponenttijakautuneita parametrilla μ. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuoden n vakuutusmaksu olkoon $(1 + v)\lambda/\mu$ $, \forall n \in \mathbb{N}$. Olkoon T vararikkohetki. Osoita, että $\mathbb{P}(T < \infty) \leq 0.01$ riippumatta Poisson-parametrista, kun $\mu = 1$, $v = 0.05$ ja yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääomaa määrä 100.

3. Yhtiön i vuosien $1, 2, \ldots$ tappiot $\xi_1(i), \xi_2(i), \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, $i = 1, 2$. Oletetaan, että $\mathbb{P}(\xi_1(1) > v) \geq \mathbb{P}(\xi_1(2) > v)$, $\forall v \in \mathbb{R}$. Olkoon R_i yhtiön i Lundbergin eksponentti. Osoita, että $R_1 \leq R_2$.

4. Olkoon vuotuinen kokonaisvahinkomäärä X yhdistettyä Poisson-jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on λ ja yksittäisen vahingon suuruus vakio a. Oletetaan, että eri vuosien kokonaisvahinkomäärät ovat toisistaan riippumattomia. Vuotuinen vakuutusmaksu olkoon P. Yhtiöllä on vuoden 1 alussa alkupääoma U_0. Olkoon T vararikkohetki. Yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, mikäli

$$\mathbb{P}(T \leq 3) \leq 0.01.$$

Osoita, että yhtiö täyttää mainitun vakavaraisuusvaatimuksen, kun parametreilla on arvot $\lambda = 10,\ a = 2,\ P = 23$ ja $U_0 = 30$.

5. Olkoot potentiaalisen vakuutetun utiliteettifunktio u ja vakuutusyhtiön utiliteettifunktio U muotoa

$$u(v) = \mu^{-1}(1 - e^{-\mu v}), \quad U(v) = a + bv, \quad v \in \mathbb{R},$$

missä μ, a ja b ovat positiivisia vakioita. Olkoon vakuutetun kokonaisvahinkomäärä X Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda > 0$. Osoita, että osapuolten nollahyötyiset vakuutusmaksut eivät riipu alkuvarallisuudesta. Todista, että voidaan määrätä sellainen vakuutusmaksu, että X:n vakuuttaminen on utiliteetin odotusarvohypoteesin mielessä edullista molemmille osapuolille.