**Riskiteorian laskuharjoitus 5, 16.10.2013**

1. Olkoon $K$ lukumäärämuuttuja ja $p_k = \mathbb{P}(K = k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Oletetaan, että

$$p_k = (a + \frac{b}{k})\, p_{k-1}, \ \ k = 1, 2, \ldots,$$

missä $a$ ja $b$ ovat vakioita, $b \neq 0$. Olkoon $P$ $K$:n todennäköisyydet generoiva funktio,

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \ \ s \in (-1, 1).$$

Osoita, että $P'(s) = asP'(s) + (a + b)P(s)$ alueessa $s \in (-1, 1)$ ja määrää $P$.
(Vastaus: $P(s) = (\frac{1-a}{1-as})^{(a+b)/a}$, jos $a \neq 0$; $\ P(s) = e^{b(s-1)}$, jos $a = 0$.)

2. (jatkoa) Tunnetusti todennäköisyydet generoiva funktio määrää jakauman. Osoita, että $K$ on binomi-jakautunut, jos lisäksi $a < 0$ ja $a + b > 0$.

3. Yhtiön vuotuinen kokonaisvahinkomäärä $X$ noudattaa yhdistettyä painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla $(\lambda, Q, S)$. Olkoon $\lambda = 100$, yksittäisen vahingon suuruus gamma-$(2, 2)$-jakautunut ja $\mathbb{P}(Q = 0.8) = \mathbb{P}(Q = 1.2) = 1/2$. Arvioi todennäköisyyttä $\mathbb{P}(X > 120)$ soveltamalla $X$:n jakaumaan

a) normaaliapproksimaatiota

b) NP-approksimaatiota

c) Wilson-Hilferty -approksimaatiota.

4. (jatkoa) Arvioi todennäköisyyttä $\mathbb{P}(X > 120)$ soveltamalla normaaliapproksimaatiota $X$:n ehdollisiin jakaumiin ehdolla $Q = 0.8$ ja $Q = 1.2$.

5. Yhtiön vuotuinen vahinkojen lukumäärä $K$ noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa parametrilla $(\lambda, Q)$. Olkoon $\lambda = 100$ ja $Q$ eksponenttijakautunut odotusarvona yksi.

a) Määrää todennäköisyys $\mathbb{P}(K > 120)$.

b) Arvioi todennäköisyyttä $\mathbb{P}(K > 120)$ lauseen 6.2.1.2 avulla.