Riskiteorian laskuharjoitus 1, 18.9.2013

1. Olkoon K Poisson-jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla $\lambda > 0$. Määrää suurin todennäköisyyksistä

$$\mathbb{P}(K = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Merkitään yleisesti satunnaismuuttujan ξ vinoutta symbolilla γ_ξ. Olkoon $\mathbb{E}\{| \xi^3 |\} < \infty$ ja $\mathrm{Var}(\xi) > 0$. Olkoot a ja b mielivaltaisia reaalilukuja ja $a \neq 0$. Osoita, että

$$\gamma_{a\xi+b} = \gamma_\xi \text{ tai } \gamma_{a\xi+b} = -\gamma_\xi.$$

3. Olkoon ξ satunnaismuuttuja ja a reaaliluku. Oletetaan, että $\mathbb{E}\{| \xi^3 |\} < \infty$, $\mathrm{Var}(\xi) > 0$ ja että

$$\mathbb{P}(\xi \leq a - x) = \mathbb{P}(\xi \geq a + x)$$

kaikilla $x \geq 0$. Osoita, että ξ:n vinous on nolla.

4. Oletetaan, että vakuutuskanta muodostuu N riippumattomasta vakuutetusta. Kunkin vakuutetun vuotuinen vahinkojen lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla 1 ja vakuutusmaksu on 1.3. Olkoon K_N yhden vuoden vahinkojen lukumäärä vakuutuskannassa ja P_N vastaava vakuutusmaksu. Määrää todennäköisyydet

$$\mathbb{P}(K_N > P_N),$$

kun $N = 1, 10$ ja 20 (tarkka arvo ja likiarvo).

5. Olkoon $\{K(t) \mid t \geq 0\}$ laskuriprosessi, jonka lisäykset ovat riippumattomia. Merkitään $p_0(t) = \mathbf{P}(K(t) = 0)$, $t \geq 0$. Olkoon $t_0 > 0$ kiinteä.

a) Osoita, että $\lim_{t \to t_0+} p_0(t) = p_0(t_0)$.

b) Olkoon $p_0(t_0-) > p_0(t_0)$, missä $p_0(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} p_0(t)$. Osoita, että

$$\lim_{t \to t_0-} \mathbf{P}(K(t_0) - K(t) \geq 1) = 1 - \frac{p_0(t_0)}{p_0(t_0-)}.$$

6. Merkitään symbolilla $K(\lambda)$ Poisson-jakautunutta satunnaismuuttujaa parametrilla λ. Olkoon $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. Osoita, että kaikilla $x > 0$,

$$\mathbb{P}(K(\lambda_2) > x) > \mathbb{P}(K(\lambda_1) > x).$$