Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 9, ratkaisuehdotus
21.11.2013

1. Olkoon $\emptyset \neq A \subset X$, (X, d) on metrinen avaruus. Osoita, että $x \mapsto d(x, A)$ on Lipschitz-funktio.

Ratkaisu. Olkoon $x, y \in X$. Jos $x \in A$, on

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(y, A) = \inf_{z \in A} d(y, z) \leq d(x, y);$$

vastaavasti, jos $y \in A$.

Jos puolestaan $x, y \notin A$, voidaan olettaa $d(x, A) \geq d(y, A)$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla

$$|d(x, A) - d(y, A)| = d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Siis $x \mapsto d(x, A)$ on 1-Lipschitz.

2. Olkoon $C \subset [0, 1]$ Cantorin 1/3-joukko. Konstruoi Lipschitz-funktio $f : C \to \mathbb{R}$, joka ei ole derivoituva missään C:n pisteessä.

Ratkaisu. Käytetään Holopaisen luentomonisteen Reaalianalyysi I merkintöjä Cantorin joukon konstruktiolle (kappaleen 1.16 alku). Samaistetaan Cantorin joukko jonoavaruuteen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ merkitsemällä $x = (x_j)$, missä $x_1 = 0$, jos $x \in [0, 1/3]$ ja $x_1 = 1$ muuten. Jos sitten $x \in J_{j,k}$ jollakin $k = k(j)$, valitaan $x_{j+1} = 0$, jos x kuuluu välin $J_{j,k}$ vasemmanpuoleiseen kolmannekseen, ja $x_{j+1} = 1$, jos x kuuluu oikeanpuoleiseen kolmannekseen.

Määritellään kuvaus

$$f(x) = f((x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x_{j+1} - x_j}{3^j},$$

joka suppenee kaikkialla joukossa C, sillä $|x_{j+1} - x_j| \leq 1$. Jos nyt $x = (x_j), y = (y_j) \in C$ ja $3^{-n-1} < |x - y| \leq 3^{-n}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, on $x_j = y_j$ kaikilla $1 \leq j \leq n - 1$ ja $x_n \neq y_n$. Nyt

$$|g(x) - g(y)| \leq 3^{-n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} 2 \frac{1}{3^j} = 4 \cdot 3^{-n-1} < 4|x - y|.$$

Siis f on Lipschitz.

3. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz, missä $A \subset X$. Määritellään $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \inf\{f(y) + Lip(f)d(x,y) : y \in A\}, x \in X.$$

Osoita, että g on Lipschitz, $Lip(g) = Lip(f)$ ja $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

Ratkaisu. Merkitään $L = Lip(f)$. Selvästi $g(x) < \infty$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi kiinnittämällä $y_0 \in A$ saadaan kolmioepäyhtälöstä

$$f(y) + Ld(x,y) \geq f(y) + Ld(y,y_0) - Ld(y_0,x) \geq f(y_0) - Ld(y_0,x),$$

joten kaikilla $x \in X$ on $f(x) > -\infty$.

Tehtävän 1 nojalla jokainen funktio $x \mapsto f(y) + Ld(y,x)$ on L-Lipschitz, joten erityisesti g on L-Lipschitz.

Lisäksi, jos $x \in A$, on funktion f Lipschitz-ominaisuuden nojalla

$$f(x) - Ld(x,x) = f(x) \leq f(y) + Ld(x,y), \quad y \in A,$$

joten $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$.

4. Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos on olemassa joukot $A_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1,2,\ldots, B \subset \mathbb{R}^n$ ja Lipschitz-kuvaukset $f_i : A_i \to \mathbb{R}^n, i = 1,2,\ldots$, siten että $\mathcal{H}^m(B) = 0$ ja $E = \cup_{i=1}^\infty f_i(A_i) \cup B$. Todista, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos ja vain jos on olemassa Lipschitz-kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, i = 1,2,\ldots$, siten että

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^\infty f_i(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

Ratkaisu. Riittävyys saadaan valitsemalla $B = E \setminus \cup_{i=1}^\infty f_i(\mathbb{R}^m)$ ja $A_i = f_i^{-1}(E)$, jolloin selvästi $E = \cup_{i=1}^\infty f_i(A_i) \cup B$ ja $\mathcal{H}^m(B) = 0$.

Välttämättömyys puolestaan seuraa jatkamalla funktiot f_i koko avaruuteen $\mathbb{R}^m$ McShanen-Whiteyn jatkolauseella ja huomaamalla, että tällöin $E \setminus \cup_{i=1}^\infty f_i(\mathbb{R}^m) \subset B$.

5. Todista, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos ja vain jos on olemassa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, i = 1,2,\ldots$, siten että

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^\infty f_i(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

Ratkaisu. Käytetään edellisen tehtävän karakterisaatiota suoristuvuudelle.

Riittävyyden toteamiseksi oletetaan, että jatkuvasti differentioituvat $f_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ toteuttavat annetun ehdon. Määritellään McShanen-Whitneyn jatkolauseen avulla kuvaukset $g_{i,j}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, joille $g_{i,j}|_{\bar{B}(0,j)} = f_i|_{\bar{B}(0,j)}$. Tämä onnistuu väliarvolauseen nojalla, sillä kompaktissa joukossa funktion f_i derivaatat ovat rajoitetut, joten $f_i|_{\bar{B}(0,j)}$ on Lipschitz. Erityisesti jos nyt $x \in \cup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)$, niin välttämättä $x \in \cup_{i,j=1}^{\infty} g_{i,j}(\mathbb{R}^m)$, joten

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^{\infty} g_{i,j}(\mathbb{R}^m)) = 0$$

ja E on m-suoristuva.

Jos puolestaan E on m-suoristuva Lipschitz-kuvauksilla $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, valitaan jokaisella $i, j \in \mathbb{N}$ jatkuvasti differentioituvat kuvaukset $g_{i,j}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, joille

$$\mathcal{H}^m(\{x \in \mathbb{R}^m : f_i(x) \neq g_{i,j}\}) \leq \frac{1}{j}.$$

Merkitään $F_i = \{x \in \mathbb{R}^m : f_i(x) \neq g_{i,j} \forall j \in \mathbb{N}\}$, jolloin mitan konvergenssin nojalla

$$\mathcal{H}^m(F_i) = 0.$$

Lipschitz-funktiot f_i toteuttavat Lusinin ehdon (N), joten edelleen

$$\mathcal{H}^m(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0.$$

Tällöin

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i,j=1}^{\infty} g_{i,j}(\mathbb{R}^m)) \leq \mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)) + \mathcal{H}^m(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0.$$

Siis väite pätee.

6. Kompaktin joukon $C \subset X$ Minkowskin (ylä)dimensio on

$$\dim_M C = \inf\{s \geq 0 : \lim_{\delta \to 0} N(C, \delta)\delta^s = 0\},$$

missä $N(C, \delta)$ on pienin luonnollinen luku k siten, että C voidaan peittää k:lla δ-säteisellä kuulalla. Todista, että jos $f : X \to Y$ on Lipschitz, niin $\dim_M f(C) \leq \dim_M C$.

Ratkaisu. Merkitään $L = Lip(f)$. Olkoon $N(C, \delta)$ niin kuin tehtävänannossa ja $s > \dim_M C$. Koska $B(x, r) \subset B(f(x), Lr)$ kaikilla $x \in X$, $r > 0$, on $N(fC, \delta) \leq N(C, \frac{1}{L}\delta)$.

Nyt

$$\lim_{\delta \to 0} N(C, \delta)\delta^s \leq \lim_{\delta \to 0} N(C, \tfrac{1}{L}\delta)\delta^s = 0,$$

joten $\dim_M fC \leq s$. Siis väite pätee.