Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 8
14.11.2013

Seuraavassa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Jatkuvuus ei ole oleellista, mutta se helpottaa joitakin yksityiskohtia. Tehtävissä 1-4 f on lisäksi kasvava.

1. Osoita, että jos f on kasvava niin on olemassa Radon-mitta $\mu_f : Bor([0,1]) \to [0,\infty)$ siten, että

$$\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a) \text{ kaikilla } 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan apufunktiota $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + x$. Nyt g on jatkuva ja aidosti kasvava, erityisesti injektiivinen. Se kuvaa avoimet välit avoimiksi väleiksi sekä kommutoi komplementin ja mielivaltaisten yhdisteiden kanssa, joten se säilyttää Borel-joukot.

Määritellään Borel-mitta asettamalla $\mu_g(A) = m(g(A))$ kaikilla $A \in Bor([0,1])$. Nyt kaikilla suljetuilla väleillä $[a,b] \subset [0,1]$ pätee

$$\mu_g([a,b]) = g(b) - g(a) + b - a.$$

Asettamalla $\mu_f = \mu_g - m$ saadaan haluttu mitta, sillä täysadditiivisuus säilyy selvästi, ja toisaalta määritelmän nojalla kaikilla Borel-joukoilla A on

$$\mu_g(A) \geq m(A).$$

2. Osoita, että μ_f jatkuva mitta, ts. $\mu_f(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita myös kääntäen, että jokainen jatkuva Radon-mitta $\mu : Bor([0,1]) \to [0,\infty)$ on muotoa $\mu = \mu_f$, missä f on kasvava ja jatkuva.

Ratkaisu. Olkoon $x \in [0,1]$. Nyt

$$\{x\} = \bigcap_{\varepsilon>0}([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1]),$$

joten

$$\mu_f(\{x\}) \leq \mu([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1]) = f(\min(1, x+\varepsilon)) - f(\max(0, x-\varepsilon))$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva, saadaan $\mu_f(\{x\}) \leq f(x) - f(x) = 0$.

Olkoon sitten $\mu\colon Bor([0,1]) \to [0,\infty)$ jatkuva Radon-mitta. Määritellään funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x) = \mu([0,x]).$$

Selvästi f on kasvava. Jatkuvuus seuraa mitan konvergenssista, sillä

$$f(x+h) - f(x) = \mu([x, x+h]) \to \mu(\{x\}) = 0$$

ja

$$f(x) - f(x-h) = \mu([x-h, x]) \to \mu(\{x\}) = 0$$

kaikilla $x \in [0,1]$, kun $h \to 0$.

3. Osoita, että jos f on Cantorin funktio, niin μ_f ja Lebesguen mitta ovat keskenään singulaariset.

Ratkaisu. Holopaisen luentomonisteen Reaalianalyysi I nojalla Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon $C_{\frac{1}{3}}$ mitta on $m(C_{\frac{1}{3}}) = 0$, joten riittää osoittaa, että $\mu_f([0,1]\setminus C_{\frac{1}{3}}) = 0$.

Toisaalta $[0,1] \setminus C_{\frac{1}{3}}$ on saman luentomonisteen nojalla numeroituva yhdiste avoimia välejä $I_{k,j}$, $j = 1, \ldots, 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, joilla kullakin Cantorin funktio on vakio. Koska μ_f on Radonin mitta, nähdään

$$\mu_f(I_{k,j}) = \sup\{f(b) - f(a)\colon [a,b] \subset I_{k,j}\} = 0.$$

Siten $\mu_f([0,1] \setminus C_{\frac{1}{3}}) = 0$.

4. Osoita, että f on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos μ_f on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen.

Ratkaisu. Aloitetaan huomiolla, että μ_f on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$, joille $\mu_f(E) < \varepsilon$, kun $m(E) < \delta$.

Oletetaan, että f on absoluuttisesti jatkuva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen $\delta > 0$, jolle absoluuttisen jatkuvuuden ehto toteutuu. Nyt, jos $m(E) < \delta$ jollakin Borel-joukolla $E \in [0,1]$, löytyy erilliset, avoimet välit (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, k$, joille $E \subset \bigcup (a_i, b_i)$ ja $\sum^k m((a_i, b_i)) = \sum^k (b_i - a_i) < \delta$. Nyt absoluuttisen jatkuvuuden nojalla

$$\mu_f(E) \leq \sum^k (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon,$$

joten $\mu_f << m$.

Jos toisaalta μ_f on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, mielivaltaisella $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta > 0$, joille

$$\sum^k (f(b_i) - f(a_i)) = \mu_f(\bigcup^k (a_i, b_i)) < \varepsilon,$$

kun

$$\sum^k (b_i - a_i) = m(\bigcup^k (a_i, b_i)) < \delta,$$

missä $[a_i, b_i]$ ovat erillisiä välejä. Siis f on absoluuttisesti jatkuva.

5. Osoita, että jos f on rajoitetusti heilahteleva, niin on olemassa merkkimitta $\mu_f : Bor(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\mu_f([a, b]) = f(b) - f(a) \text{ kaikilla } a < b, a, b \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu. Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, erityisesti jokaisella suljetulla välillä $I \subset \mathbb{R}$ on $f|_I = g - h$ kasvavilla funktioilla $g, h\colon I \to \mathbb{R}$.

Nyt tehtävän 1 nojalla löytyy Radonin mitat μ_g ja μ_h, joille

$$\mu_g([a, b]) = g(b) - g(a)$$

ja

$$\mu_h([a, b]) = h(b) - h(a)$$

kaikilla $[a, b] \subset I$. Asetetaan $\mu_f = \mu_g - \mu_h$, jolloin μ_f on selvästi merkkimitta ja

$$\mu_f([a, b]) = \mu_g([a, b]) - \mu_h([a, b]) = g(b) - g(a) - (h(b) - h(a)) = f(b) - f(a).$$

Erityisesti siis kaikilla välillä $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, löytyy halutunlainen mitta μ_f^n, ja selvästi mitat $\mu_f^n = \mu_f^m$ välillä $[-n, n] \cap [-m, m]$. Määrittelemällä

$$\mu_f(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_f^n(A \cap [-n, n])$$

saadaan etsitty merkkimitta.

6. Osoita, että jos $\mu : Bor([0, 1]) \to \mathbb{R}$ on merkkimitta, niin $f : x \mapsto \mu([0, x]), x \in [0, 1]$, on rajoitetusti heilahteleva ja $V_f([0, 1]) \leq V(\mu, [0, 1])$.

(Itse asiassa tässä pätee yhtälö. Mieti miksi, jos haluat.)

Ratkaisu. Jordanin hajotelman nojalla voidaan kirjoittaa $\mu = \mu^+ - \mu^-$, missä μ^+ ja μ^- ovat äärellisiä mittoja. Erityisesti funktiot $g, h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \mu^+([0, x]), \quad h(x) = \mu^-([0, x]),$$

ovat kasvavia, joten kurssin Reaalianalyysi I tietojen nojalla $f = g - h$ on rajoitetusti heilahteleva.

Koska lisäksi pätee $|f(a) - f(b)| = |\mu([a, b])|$, nähdään

$$V_f([0,1]) = \sup \sum^k |f(a_i) - f(b_i)| = \sup \sum^k |\mu([a_i, b_i])| \leq V(\mu, [0,1]),$$

missä supremumit otetaan yli kaikkien kokoelmien erillisiä välejä $(a_i, b_i) \subset [0, 1]$.