Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 7, Ratkaisuehdotuksia
7.11.2013

Seuraavassa $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on merkkimitta, missä $\mathcal{M}$ on joukon X σ-algebra.

1. Osoita, että jos $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ ja $\mu(A) = \infty$, niin $\mu(B) = \infty$.

Ratkaisu. Olkoot A ja B niin kuin väitteessä. Nyt merkkimitan määritelmän nojalla

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B);$$

erityisesti yhtälön vasen puoli on määritelty, joten $\mu(B \setminus A) > -\infty$. Mutta tällöin $\mu(B) = \infty$.

Vastaavalla todistuksella voidaan näyttää $\mu(B) = -\infty$, kun $\mu(A) = -\infty$.

2. Osoita, että μ ei voi saada molempia arvoja ∞ ja $-\infty$.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: Olkoot $A, B \in \mathcal{M}$ joukkoja, joille $\mu(A) = \infty$ ja $\mu(B) = -\infty$. Nyt tehtävän 1 nojalla $\mu(A \cup B) = \infty$. Toisaalta vastaavalla päättelyllä kuin tehtävässä 1 saadaan $\mu(A \cup B) = -\infty$, mikä on ristiriita.

3. Osoita, että Jordanin hajoitelman mitat μ^+ ja μ^- ovat yksikäsitteisesti määrätyt.

Ratkaisu. Olkoon $\tilde{\mu}^+$ ja $\tilde{\mu}^-$ toinen Jordanin hajotelma. Koska molemmissa pareissa mitat ovat keskenään singulaariset, löytyy joukot A ja $\tilde{A}$, joille

$$\mu^+(A) = 0 = \mu^-(X \setminus A), \quad \tilde{\mu}^+(\tilde{A}) = 0 = \tilde{\mu}^-(X \setminus \tilde{A}).$$

Nyt sekä $(A, X \setminus A)$ että $(\tilde{A}, X \setminus \tilde{A})$ ovat mitan μ Hahnin hajotelmia (A Jordanin hajotelman konstruktion perusteella), sillä jos $E \in \tilde{A}$, on $\mu(E) = -\tilde{\mu}^-(E) \leq 0$ ja vastaavasti, jos $E \cap \tilde{A} = \emptyset$.

Olkoon $E \in \mathcal{M}$ mielivaltainen. Nyt

$$\mu^+(E) = \mu^+(E \setminus A) = \mu(E \setminus A) = \mu(E \setminus \tilde{A}) = \tilde{\mu}^+(E \setminus \tilde{A}) = \tilde{\mu}^+(E),$$

missä keskimmäinen epäyhtälö seuraa huomiosta, että jos jollakin $E' \in \mathcal{M}$ on $E' \in (A \setminus \tilde{A}) \cup (\tilde{A} \setminus A)$, niin E' on sekä positiivinen että negatiivinen joukko; tällöin $\mu(E') = 0$.

Vastaavasti nähdään $\mu^-(E) = \tilde{\mu}^-(E)$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$.

4. Osoita, että jos $\nu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on mitta, niin $\mu << \nu$, jos ja vain jos $V(\mu, .) << \nu$.

Ratkaisu. Oletetaan ensin $\mu << \nu$, ja osoitetaan $V(\mu, \cdot) << \nu$. Olkoon $\nu(A) = 0$ jollakin $A \in \mathcal{M}$. Tällöin on $\mu(A) = 0$, joten kaikilla mitallisilla osajoukoilla $B \subset A$ on $\mu(B) = 0$. Tällöin määritelmän nojalla $V(\mu, A) = 0$, joten $V(\mu, \cdot) << \nu$.

Jos toisaalta $V(\mu, \cdot) << \nu$ ja $\nu(A) = 0$ jollakin $A \in \mathcal{M}$, määritelmän nojalla

$$|\mu(A)| \leq V(\mu, A) = 0.$$

Siis väite pätee.

Seuraavassa $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on mitta. Joukko $A \in \mathcal{M}$ on μ:n atomi, jos $\mu(A) > 0$ ja kaikille $B \in \mathcal{M}, B \subset A$, on $\mu(B) = 0$.

5. Mitä ovat Lebesguen mitan ja laskentamitan atomit?

Ratkaisu. Laskentamitan atomit ovat yksiöt, sillä jokaisen yksiön mitta on 1 ja ainoa yksiön sisältämä aito osajoukko on tyhjä joukko.

Lebesguen mitalla ei ole atomeita: Jos A on atomi, seuraavan tehtävän nojalla löytyy $x \in A$, jolle $m(A \setminus \{x\}) = 0$. Koska $m(\{x\}) = 0$, täytyy olla $m(A) = 0$, mikä on ristiriita.

6. Osoita, että jokaisen $\mathbb{R}$:n Radon-mitan μ atomit ovat melkein yksiöitä, eli jokaiselle μ:n atomille A on olemassa $a \in A$ siten, että $\mu(A \setminus \{a\}) = 0$.

Ratkaisu. Olkoon μ Radonin mitta reaaliluvuilla ja A jokin sen atomi. Nyt jokaisella $k \in \mathbb{Z}$ voidaan kirjoittaa

$$\mu(A) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} \mu(A \cap Q),$$

missä $\mathcal{D}_k$ on harjoituksissa 5 määritelty dyadisten kuutioiden perhe. Erityisesti jokaisen dyadisen kuution sulkeuma on kompakti, joten välttämättä $\mu(A) < \infty$.

Joukon A atomisuuden nojalla jokaisella k löytyy täsmälleen yksi kuutio $Q_k \in \mathcal{D}_k$, jolle $\mu(A) = \mu(A \cap Q_k)$. Reaalilukujen täydellisyyden nojalla $A \cap Q_k \to \{a\}$ jollakin $a \in \mathbb{R}$, kun $k \to \infty$. Toisaalta mitan konvergenssin nojalla $\mu(A \cap Q_k) \to \mu(\{a\})$, joten $\mu(\{a\}) = \mu(A)$. Nyt $\mu(A \setminus \{a\}) = 0$.

Mainittakoon, että sama todistus pätee $\mathbb{R}^n$:ssä.

7. Osoita, että jos μ:llä ei ole atomeja ja $0 < t < \mu(X) < \infty$, niin on olemassa $A \in \mathcal{M}$ siten, että $\mu(A) = t$.

Ratkaisu. Tapa 1. Todetaan aluksi, että löytyy sellainen vähenevä jono (A_i) joukkoja, jolle kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $i \in \mathbb{N}$, jolle $0 < \mu(A_i) < \varepsilon$. Tälläiset joukot voi konstruoida havaitsemalla, että jos $\mu(A) > 0$, löytyy joukko $A' \subset A$, jolle $\mu(A') \leq \mu(A)/2$, sillä mitalla μ ei ollut atomeja.

Kiinnitetään sitten $0 < t < \mu(X)$, ja olkoon $A_0 \in \mathcal{X}$ joukko, jolle $0 < \mu(A_0) < t$. Valitaan mitallinen joukko $A_1 \supset A_0$, jolle $\mu(A_1) \leq t$ ja

$$\mu(A_1) \geq \frac{\sup\{\mu(A) \colon A \supset A_0, \mu(A) \leq t\} + \mu(A_0)}{2}.$$

Oletetaan sitten, että mitallinen joukko A_{i-1} on valittu, ja valitaan mitallinen joukko $A_i \supset A_{i-1}$, jolle $\mu(A_i) \leq t$ ja

$$\mu(A_i) \geq \frac{\sup\{\mu(A) \colon A \supset A_{i-1}, \mu(A) \leq t\} + \mu(A_{i-1})}{2}.$$

Näin saadaan kasvava jono (A_i) joukkoja; määritellään $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$.

Nyt joukkojen valinnan perusteella pätee

$$\mu(A) = \lim_k \mu(\bigcup^k A_i) \leq t.$$

Jos olisi $\mu(A) < t$, löytyisi mitallinen joukko $E \in X \setminus A$, jolle $0 < \mu(E) < t - \mu(A)$; erityisesti $\mu(A \cup E) < t$. Toisaalta löytyy i_0, jolle

$$\mu(A_{i_0}) \geq \mu(A) - \mu(E).$$

Tällöin

$$\mu(A_{i_0+1}) \geq \frac{\mu(A \cup E) + \mu(A_{i_0})}{2} > \frac{\mu(A) + \mu(E) + \mu(A) - \mu(E)}{2} = \mu(A),$$

mikä on ristiriita jonon (A_i) kasvavuuden kanssa.

Tapa 2. Kirjoitetaan $\mu(X) = c$ ja osoitetaan vahvempi väite: löytyy kasvava kuvaus $J \colon [0, c] \to \mathcal{M}$, jolle $\mu(J(t)) = t$ kaikilla $t \in [0, c]$.

Määritellään ensin perhe kuvauksia asettamalla

$$\mathcal{F} = \{J \colon I_J \to \mathcal{M} | I_J \subset [0, c], J \text{ kasvava}, \mu(J(t)) = t \ \forall t \in I_J\}$$

Nyt $\mathcal{F} \neq \emptyset$, sillä kuvaukselle $J \colon \{0, c\} \to \mathcal{M}$, $J(0) = \emptyset$, $J(c) = X$, pätee selvästi $J \in \mathcal{F}$. Järjestetään perhe $\mathcal{F}$ osittain asettamalla $J \leq J'$, jos

$$I_J \times J(I_J) \subset I_{J'} \times J'(I_{J'}).$$

Olkoon $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ ketju, so. kaikilla $J, J' \in L$ pätee $J \leq J'$ tai $J' \leq J$. Todetaan aluksi, että jos $J, J' \in \mathcal{L}$ ja $t \in I_J \cap I_{J'}$, niin $J(t) = J'(t)$. Järjestyksen määritelmän nojalla on ketjulla $\mathcal{L}$ olemassa pienin yläraja $L = \sup \mathcal{L}$, jolle

$$I_L \times L(I_L) = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} (I_J \times J(I_J)).$$

Siten erityisesti $I_L = \bigcup_{J \in \mathcal{L}} I_J \subset [0, c]$ ja $L(t) = J(t)$ jollakin (kaikilla) $J \in \mathcal{L}$, jolle $t \in I_J$. Jos $t \in I_L$, niin jollakin $J \in \mathcal{L}$ on $t \in I_J$, joten $\mu(L(t)) = t$. Jos lisäksi $t' \in I_L$ (voi olettaa $t < t'$), niin jollain $J' \in \mathcal{L}$ on $[t, t'] \subset I_{J'}$, joten $L(t) \subset L(t')$. Siis $L \in \mathcal{F}$.

Nyt Zornin lemman nojalla löytyy maksimaalinen alkio $H \in \mathcal{F}$. Riittää enää osoittaa $I_H = [0, c]$. Jos yhtälö ei päde, löytyy $t \in [0, c] \setminus I_H$. Tällöin määritellään luvut $m = \sup\{r \in I_H \colon r < t\}$ ja $M = \inf\{r \in I_H \colon r > t\}$. Perheen $\mathcal{F}$ epätyhjyyden perustelevan esimerkin nojalla luvut m ja M ovat olemassa ja äärellisiä.

Jos $t \in \partial I_H$, löytyy joukon I_H monotoninen jono (t_i), jolle $t_i \to t$. Jos jono on kasvava, on $\mu(\bigcup_i J(t_i)) = t$; vastaavasti laskevalle jonolle $\mu(\bigcap_i J(t_i)) = t$. Siis I_H on suljettu, joten erityisesti $m, M \in I_H$. Koska lisäksi $t \notin I_H$, pätee $m < M$.

Mitta μ oli atomiton, joten joukolla $J(M) \setminus J(m)$ on osajoukko E, jolle $0 < \mu(E) < \mu(J(M)) - \mu(J(m))$. Tällöin

$$\mu(J(m)) < \mu(J(m) \cup E) < \mu(J(M)).$$

Koska H oli maksimaalinen alkio, saadaan ristiriita. Siis väite pätee.