Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 6
31.10.2013

Seuraavassa μ and ν ovat Radonin mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä.

1. Osoita, että ylä- ja aladerivaatat $\overline{D}_\nu\mu$ ja $\underline{D}_\nu\mu$ ovat Borelin funktioita.

Ratkaisu. Osoitetaan väite yläderivaatalle; aladerivaatalle todistus on oleellisesti samanlainen.

Kiinnitetään $r > 0$, ja osoitetaan, että $f_r(x) = \frac{\mu(\bar{B}(x,r)}{\nu(\bar{B}(x,r)}$ on Borelin funktio. Tätä varten näytetään, että $f_r^{-1}E_t$ on avoin kaikilla $t > 0$, missä $E_t = (-\infty, t)$.

Olkoon $t > 0$ ja $x \in f_r^{-1}E_t$, ja kirjoitetaan $B = \bar{B}(x,r)$. Valitaan $\varepsilon = (t - \mu(B))/2$; nyt löytyy avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^n$, jolle $B \subset V$ ja $\mu(V) \leq \mu(B) + \varepsilon$. Erityisesti $\mu(V) < t$. Merkitään $\delta = d(B, \partial V) > 0$. Jos nyt on $z \in B(x,\delta)$, pätee $\bar{B}(z,r) \subset V$. Tällöin $\mu(\bar{B}(z,r)) < t$, joten $B(x,\delta) \subset f_r^{-1}E_t$. Siis $f_r^{-1}E_t$ on avoin, joten f_r on Borelin funktio.

Holopaisen luentomuistiinpanojen nojalla yläderivaatan määritelmässä riittää tarkastella yläraja-arvoja yli numeroituvien jonojen $t_i \to 0$. Toisaalta numeroituvat yläraja-arvot säilyttävät mitallisuuden, joten $\overline{D}_\nu\mu$ on Borelin kuvaus.

2. Todista, että jos μ on absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen, niin

$$\int D_\nu\mu(x)^2\, d\nu(x) = \int D_\nu\mu(x)\, d\mu(x)$$

Ratkaisu. Merkitään $f = D_\nu\mu$; lauseen 5.22 (ja tehtävän 1) nojalla f on Borelin funktio. Näin ollen löytyy kasvava jono Borel-mitallisia, yksinkertaisia funktioita

$$f_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\chi_{A_{ij}},$$

joille $f_i \to f$, kun $i \to \infty$.

Koska $\mu \ll \nu$, pätee Radonin-Nikodymin lauseen nojalla

$$\mu(A_{ij}) = \int f\chi_{A_{ij}}\, d\nu$$

kaikilla i ja j. Integraalin linearisuuden nojalla saadaan siis

$$\int f_i \, d\mu = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\mu(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} \int f\chi_{A_{ij}} \, d\nu = \int f f_i \, d\nu.$$

Nyt monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int f \, d\mu = \lim_i \int f_i \, d\mu = \lim_i \int f f_i \, d\nu = \int f^2 \, d\nu,$$

kuten haluttiin.

3. Todista, että $\underline{D}_\nu \mu(x) < \infty$ μ- melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos μ on absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen.

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että μ on absoluuttisesti jatkuva ν:n suhteen. Lauseen 5.24 nojalla on

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu \mu(x) = \infty\}) = 0.$$

Väite seuraa nyt absoluuttisesta jatkuvuudesta.

Oletetaan sitten

$$\mu(A) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu \mu(x) = \infty\}) = 0.$$

Määritellään lisäksi joukot $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{D}_\nu \mu(x) \leq i\}$, $i \in \mathbb{N}$, jolloin $\mathbb{R}^n$ on joukkojen A ja $\bigcup_i A_i$ erillinen yhdiste.

Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen joukko, jolle $\nu(E) = 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \underbrace{\mu(E \cap A)}_{=0} + \mu(E \cap \bigcup_i A_i) \\
&\leq \sum_i \mu(E \cap A_i) \leq \sum_i k \underbrace{\nu(E \cap A_i)}_{=0} = 0,
\end{aligned}$$

kuten haluttiin.

4. Todista, että $\overline{D}_\nu \mu(x) = \infty$ μ- melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos μ ja ν ovat keskenään singulaariset.

Ratkaisu. Riittävyys seuraa lauseesta 5.30. Välttämättömyys puolestaan seuraa oletuksesta

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu \mu(x) = \infty\}) = 0$$

sekä lauseesta 5.24:

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n \colon \overline{D}_\nu \mu(x) = \infty\}) = 0$$

5. Olkoot $1 < p \leq \infty$ ja $f_i \in L^p(\mu)$, $i = 1, 2, ...$, siten, että $f_i \geq 0$ ja $\sup_i \int f_i^p \, d\mu < \infty$. Määritellään

$$\mu_i(E) = \int_E f_i \, d\mu,$$

kun E on μ-mitallinen joukko. Osoita, että jos jono (μ_i) suppenee heikosti kohti Radon-mittaa ν, niin ν on absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen.

Ratkaisu. Oletetaan, että (μ_i) suppenee heikosti kuten väitteessä, ja kirjoitetaan $M = \sup_i \int f_i^p \, d\mu$. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, jolle $\mu(A) = 0$. Osoitetaan $\nu(A) = 0$.

Olkoot $\varphi_j \in C_0(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ positiivisia funktioita, joille $\varphi_j \to \chi_A$ ja $\mu(K_j) \leq 1/j$, missä $K_j = \text{spt } \varphi_j$. Nyt dominoidun konvergessin ja Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int \chi_A \, d\nu = \lim_j \int \varphi_j \, d\nu \\
&= \lim_j \lim_i \int \varphi_j f_i \, d\mu \\
&\leq \lim_j \limsup_i \mu(K_j)^{1-1/p} ||f_i||_p \\
&\leq \lim_j \left(\frac{1}{j}\right)^{1-1/p} M^{1/p} = 0.
\end{aligned}$$

Siis ν on absoluuttisesti jatkuva μ:n suhteen.

6. Osoita, ettei edellisen tehtävän väite päde, jos $p = 1$.

Ratkaisu. Valitaan mitaksi μ Lebesguen mitta reaaliluvuille, ja määritellään kuvaukset $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_i(x) = i$, kun $x \in [-\frac{1}{2i}, \frac{1}{2i}]$, ja $f_i(x) = 0$ muuten. Nyt

$$\int f_i \, dm = i \frac{1}{i} = 1,$$

joten $\sup_i \int f_i < \infty$.

Olkoon sitten $g \in C_0(\mathbb{R})$ ja $\varepsilon > 0$. Kompaktilla välillä $[-1, 1]$ g on tasaisesti jatkuva, joten löytyy $i_0 \in \mathbb{N}$, jolle kaikilla $x \in [-\frac{1}{2i_0}, \frac{1}{2i_0}]$ pätee

$|g(x) - g(0)| < \varepsilon$. Näin ollen kaikilla $i \geq i_0$ pätee

$$i\frac{1}{i}(g(0) - \varepsilon) \leq \int g\, d\mu_i \leq i\frac{1}{i}(g(0) + \varepsilon),$$

joten $\int g\, d\mu \to g(0)$. Saadaan siis $\nu = \delta_0$, joten edellisen tehtävän väite ei päde.