Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 5
17.10.2013

Seuraavassa $\mathcal{D}_k, k \in \mathbb{Z}$, on dyadisten kuutioiden, joiden sivunpituus on 2^{-k}, perhe ja $\mathcal{D} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_k$ sekä μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Ts. $Q \in \mathcal{D}_k$, jos joillain $j_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : (j_i - 1)2^{-k} \leq x_i < j_i 2^{-k}, i = 1, \dots, n\}.$$

1. Todista dyadinen Vitalin peitelause: Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ siten, että jokainen A:n piste kuuluu mielivaltaisen pieneen $\mathcal{V}$:n kuutioon. Jos $\epsilon > 0$, on olemassa erilliset kuutiot $Q_1, Q_2, \dots \in \mathcal{V}$, joille

$$A \subset \bigcup_i Q_i \text{ ja } \sum_i \mu(Q_i) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Ratkaisu. Todetaan aluksi, että selvästi on olemassa vain numeroituva määrä dyadisia kuutioita.

Koska μ on Radonin mitta, löytyy avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$, jolle $A \subset U$ ja $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Valitaan jokaisella $x \in A$ maksimaalinen dyadinen kuutio $Q_x \in \mathcal{V}$, jolle $x \in Q_x \subset U$. Selvästi kokoelma $\mathcal{W} = \{Q_x : x \in A\}$ on joukon A peite.

Nyt jos joillain Q_x, $Q_y \in \mathcal{W}$ pätee $Q_x \cap Q_y \neq \emptyset$, niin välttämättä joko $Q_x \subset Q_y$ tai $Q_y \subset Q_x$. Maksimaalisuuden nojalla pätee siis $Q_x = Q_y$, joten $\mathcal{W}$ kokoelma erillisiä kuutioita.

Koska lisäksi $\bigcup \mathcal{W} \subset U$, on

$$\sum_i \mu(Q_i) = \mu(\bigcup_i Q_i) \leq \mu(A) + \varepsilon,$$

kuten haluttiin.

2. Todista dyadinen tiheyspistelause: jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(A \cap Q_k(x))}{\mu(Q_k(x))} = 1$$

μ melkein kaikilla $x \in A$, missä $Q_k(x)$ on se $\mathcal{D}_k$:n kuutio, joka sisältää x:n.

Ratkaisu. Riittää osoittaa

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\mu(A \cap Q_k(x))}{\mu(Q_k(x))} = 1$$

melkein kaikilla $x \in A$.

Kirjoitetaan

$$\{x \in A \colon \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu(A \cap Q_k(x))}{\mu(Q_k(x))} < 1\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

missä

$$A_i = \{x \in A \colon \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu(A \cap Q_k(x))}{\mu(Q_k(x))} < 1 - \frac{1}{i}, |x| < i\}.$$

Nyt riittää osoittaa, että A_i on mitallinen ja $\mu(A_i) = 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Mitallisuus seuraa huomiosta

$$A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l \geq k} \{x \in A \colon \frac{\mu(A \cap Q_l(x))}{\mu(Q_l(x))} < 1 - \frac{1}{i}, |x| < i\},$$

sillä tässä jokainen oikean puolen joukko on joukon A ja dyadisten kuutioiden leikkausten yhdisteenä mitallinen. Siten jokainen A_i on mitallinen.

Kiinnitetään $i \in \mathbb{N}$ ja merkitään $\lambda = 1 - \frac{1}{i}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska μ on Radonin mitta, löytyy avoin joukko U, jolle $A_i \subset U$ ja $\mu(U) \leq \mu(A_i) + \varepsilon$. Nyt perhe

$$\mathcal{V} = \{Q_k(x) \colon x \in A_i, \mu(A \cap Q_k(x)) < \lambda \mu(Q_k(x)), Q_k(x) \subset U\}$$

toteuttaa Vitalin peitelauseen oletukset. Siten löytyy erilliset dyadiset kuutiot $Q_1, Q_2, ... \in \mathcal{V}$, joille

$$\mu(A_i \setminus \bigcup_k Q_k) = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mu(A_i) &= \mu(A_i \cap \bigcup_k Q_k) + \mu(A_i \setminus \bigcup_k Q_k) \\
&\leq \sum_k \mu(A_i \cap Q_k) \leq \lambda \sum_k \mu(Q_k) \\
&= \lambda \mu(\bigcup_k B_k) \leq \lambda \mu(U) \\
&\leq \lambda(\mu(A_i) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen ja A_i on rajoitettu, saadaan

$$\mu(A_i) \leq \lambda \mu(A_i) < \infty,$$

joten $\mu(A_i) = 0$. Väite seuraa.

3. Mitkä ovat pienimmät luvut $P(1)$ ja $Q(1)$, joilla Besicovitchin peitelause pätee $\mathbb{R}$:ssä?

Ratkaisu. Osoitetaan, että vastaus molempiin on 2.

Tarkastelemalla joukkoa $A = \{0, 1\}$ ja peitettä $\{[-1/2, 1/2], [1/2, 3/2]\}$ nähdään $P(1), Q(1) \geq 2$.

Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ rajoitettu ja $\mathcal{B}$ joukon A mielivaltainen suljetuista väleistä koostuva peite. Besicovitchin peitelauseen nojalla löytyy numeroituva peite $\mathcal{B}_0 = \{B_1, B_2, ...\}$, jolle kuulien karakterististen funktioiden summa on tasaisesti rajoitettu.

Kostruoidaan etsitty peite induktiivisesti. Määritellään kokoelma $\mathcal{B}_1$ asettamalla

$$\mathcal{B}_1 = \begin{cases} \mathcal{B}_0 \setminus \{B_1\}, & \text{jos } B_1 \subset \bigcup_{i=2}^{\infty} B_i \\ \mathcal{B}_0, & muuten. \end{cases}$$

Oletetaan sitten, että kokoelma $\mathcal{B}_{n-1}$ on määritelty. Määritellään kokoelma $\mathcal{B}_n$ asettamalla

$$\mathcal{B}_n = \begin{cases} \mathcal{B}_{n-1} \setminus \{B_n\}, & \text{jos } B_n \subset \bigcup \mathcal{B}_{n_1} \\ \mathcal{B}_{n-1}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt haettu peite on (selvästi epätyhjä) kokoelma $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i$, sillä jos löytyisi piste $x \in \mathbb{R}$, joka kuuluisi kolmeen eri $\mathcal{B}$:n joukkoon sisältyy yksi niistä välttämättä kahden muun yhdisteeseen, joten se olisi poistettu konstruktiossa. Siis $P(1) = 2$.

Yhtälö $Q(1) = 2$ saadaan numeroimalla $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ ja muodostamalla uudet kokoelmat $\mathcal{A}_i$ induktiivisesti asettamalla $B_1 \in \mathcal{A}_1$. Jos kokoelma $\mathcal{A}_{n-1}$ on määritelty, asetetaan

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \mathcal{A}_{n-1} \cup \{B_n\}, & \text{jos } B_n \cap \bigcup \mathcal{A}_{n-1} = \emptyset \\ \mathcal{A}_{n-1}, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Nyt etsityt kokoelma ovat $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ ja $\mathcal{B} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

4. Osoita, ettei Besicovitchin peitelause päde äärettönulotteisessa sisätuloavaruudessa.

Ratkaisu. Olkoon H äärettönulotteinen sisätuloavaruus ja $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormaali kanta H:ssa. Valitaan $A = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, jolloin A on selvästi rajoitettu, ja kaikilla e_n, e_m pätee

$$|e_n - e_m|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle = 2,$$

joten $|e_n - e_m| = \sqrt{2}$. Valitaan joukolle A peite $\{B(e_n, 6/5)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nyt kukin A:n piste kuuluu täsmälleen yhteen peitteen joukkoon, joten mitään joukoista ei voi poistaa. Toisaalta origo kuuluu jokaiseen peitteen joukkoon, joten Besicovitchin peitelause ei voi päteä H:ssa.

5. Metrinen avaruus X on äärellisulotteinen, jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $x \in X$ ja $r > 0$ on olemassa $x_1, \ldots, x_N \in X$, joille

$$B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r).$$

Osoita, että jos X:ssä on tuplaava Borelin mitta μ, niin X on äärellisulotteinen. Mitan μ tuplaavuus tarkoittaa, että jollain vakiolla $C < \infty$ on $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$ kaikille $x \in X$ ja $r > 0$.

Ratkaisu. Olkoon $x \in X$ ja $r > 0$, ja olkoot $x_i \in B(x, 2r)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ pisteitä, joille $d(x_i, x_j) > r$. Nyt kuulat $B(x_i, r/2)$ ovat erilliset ja sisältyvät kuulaan $B(x, 3r)$.

Siten

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(B(x_i, r)) \leq \mu(B(x, 3r)).$$

Toisaalta $B(x, 3r) \subset B(x_i, 6r)$ kaikilla i, joten

$$\mu(B(x, 3r)) \leq \mu(B(x_i, 6r)) \leq C^4 \mu(B(x_i, r)).$$

Koska tässä i oli mielivaltainen, pätee $N \leq C^4$. Kuulasta $B(x, 2r)$ löytyy siis korkeintaan C^4 pistettä, joiden keskinäinen etäisyys on vähintään r. Näin ollen väite seuraa.