Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 4
3.10.2013

1.Todista, että jos $A \subset \mathbb{R}^m$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ ovat kompakteja, niin (dim on Hausdorffin dimensio)

$$\dim A + \dim B \leq \dim(A \times B).$$

Ratkaisu. Olkoon $s < \dim A$ ja $t < \dim B$, jolloin $\mathcal{H}^s(A) > 0$ ja $\mathcal{H}^t(B) > 0$. Nyt halutaan osoittaa $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$, koska tällöin määritelmän nojalla

$$\dim(A \times B) \geq s + t.$$

Koska $s < \dim A$ ja $t < \dim B$ ovat mielivaltaisia, väite pätee.

Osoitetaan $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$. Nyt Frostmanin lemman nojalla löytyy Radonin mitat μ ja ν, joille

$$\operatorname{spt} \mu \subset A, \quad \mu(A) > 0 \text{ ja } \mu(B^m(x,r)) \leq c_1 r^s \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, r > 0$$

ja

$$\operatorname{spt} \nu \subset B, \quad \nu(B) > 0 \text{ ja } \nu(B^n(y,r)) \leq c_2 r^t \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, r > 0.$$

Koska μ and ν ovat Radonin mittoja, voidaan määritellä tulomitta $\sigma = \mu \times \nu$. Merkitään olkoon $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ ja $r > 0$. Koska $B^{m+n}(z,r) \subset B^m(x,r) \times B^n(y,r)$ pätee

$$\sigma(B^{m+n}(z,r)) \leq \mu(B^m(x,r))\nu(B^n(y,r)) \leq c_1 c_2 r^{s+t}.$$

Jos $z \notin A \times B$, niin $x \notin A$ tai $x \notin B$. Jos $x \notin A$ ja $\delta = d(x,A) > 0$ (sillä A on kompakti), on

$$\sigma(B^{m+n}(z,\delta)) \leq \mu(B^m(x,\delta))\nu(B^n(y,\delta)) = 0,$$

sillä spt $\mu \subset A$ ja $B^m(x,\delta) \subset \mathbb{R}^m \setminus A$. vastaavasti, jos $y \notin B$, on $\sigma(B^{m+n}(z,\delta)) = 0$. Siis

$$\operatorname{spt} \sigma \subset A \times B.$$

Lopuksi huomataan

$$\sigma(A \times B) = \mu(A)\nu(B) > 0.$$

Nyt Frostmanin lemman nojalla $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$.

2. Todista Holopaisen monisteen lause 4.78 (käyttämällä lausetta 4.70).

Ratkaisu. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $s > 0$.

(a) Oletetaan $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Tehdään vastaoletus: $C_s(A) > 0$. Tällöin löytyy todennäköisyysmitta $\mu \in \mathcal{M}_1(A)$, jolle $I_s(\mu) < \infty$. Mitta μ täyttää lauseen 4.70 kohdan (a) oletukset, joten kyseisen kohdan nojalla nyt $\mathcal{H}^s(A) = 0$, mikä on ristiriita.

(b) Oletetaan $C_s(A) = 0$ ja $t > s$. Jos olisikin $\mathcal{H}^t(A) > 0$, niin lauseen 4.70 kohdan (b) nojalla löytyy Radonin todennäköisyysmitta μ, jolle spt $\mu \subset A$ ja $I_s(\mu) < \infty$. Mutta nyt $\mu \in \mathcal{M}_1(A)$, joten $C_s(A) \geq 1/I_s(\mu)$, mikä on ristiriita.

(c) Halutaan osoittaa $\dim A = \inf\{s : C_s(A) = 0\}$. Nyt Hausdorffin dimension määritelmän ja (a)-kohdan nojalla

$$\dim A = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} \geq \inf\{s : C_s(A) = 0\}.$$

Toisaalta (b)-kohdan nojalla, jos $C_s(A) = 0$, kaikilla $t > s$ pätee $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Näin ollen

$$\inf\{s : C_s(A) = 0\} \geq \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \dim A.$$

3. Todista (käyttämättä lauseita 4.70 ja 4.78), että Rieszin kapasiteetille $C_s, s > 0$, pätee
(a) $C_s(\{x\}) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$,
(b) $C_s(A) < \infty$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu.

Ratkaisu. (a) Tehdään vastaoletus: $C_s(\{x\}) > 0$ jollain $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin löytyy todennäköisyysmitta $\mu \in \mathcal{M}_i(\{x\})$, jolle $I_s(\mu) < \infty$. Toisaalta ainoa tällainen mitta on δ_x, joten $\mu = \delta_x$. Tällöin määritelmän nojalla s-energia on

$$I_s(\mu) = \frac{1}{|x - x|^s} = \infty$$

sillä $s > 0$. Siis väite pätee.

(b) Koska A on rajoitettu, sen halkaisija on $R = d(A) < \infty$. Tällöin $|x-y|^s \leq R^s$ kaikilla $x, y \in A$, joten $\mu \in \mathcal{M}_1(A)$ pätee

$$I_s(\mu) \geq 1/R^s.$$

Erityisesti $C_s(A) \leq R^s < \infty$.

4. Osoita, että jos $K_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots$, ovat kompakteja joukkoja siten, että $C_s(K_i) = 0$, niin $C_s(\cup_i K_i) = 0$.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $K = \cup_i K_i$. Tehdään vastaoletus $C_s(K) > 0$. Tällöin löytyy mitta $\mu \in \mathcal{M}_1(K)$, jolle $I_s(\mu) < \infty$. Erityisesti jollain $i \in \mathbb{N}$ pätee myös $\mu(K_i) > 0$. Tällöin Radon-mitta

$$\mu_i = \frac{1}{\mu(K_i)} \mu \llcorner K_i \in \mathcal{M}_1(K_i),$$

sillä $\mu_i(\mathbb{R}^n) = 1$ ja kantaja spt μ_i on K_i:n osajoukkona kompakti. Lisäksi s-energia on

$$I_s(\mu_i) = \frac{1}{\mu(K_i)^2} \int_{K_i} \int_{K_i} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^s} \leq \frac{1}{\mu(K_i)^2} I_s(\mu) < \infty,$$

joten $C_s(K_i) \geq \mu(K_i)^2 / I_s(\mu) > 0$, mikä on ristiriita.

5. Olkoot μ_j, $j \in \mathbb{N}$, ja μ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä siten, että $\mu_j \to \mu$ heikosti. Todista, että kaikilla $s > 0$ on

$$I_s(\mu) \leq \liminf_{j \to \infty} I_s(\mu_j).$$

Vihje: Totea ensin, että on olemassa funktiot $g_k \in C_0(\mathbb{R})$ siten, että $0 \leq g_k(t) \leq |t|^{-s}$ ja $\lim_{k \to \infty} g_k(t) = |t|^{-s}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Oletetaan lisäksi, että spt μ_j on kompakti kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

Määritellään kaikilla $k \in \mathbb{N}$ kuvaus $h_k \in C_0(\mathbb{R})$ asettamalla

$$h_k(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq k \\ -t + k + 1, & k \leq t \leq k+1 \\ t + k + 1, & -k-1 \leq t \leq -k \\ 0, & |t| \geq k+1 \end{cases}$$

Nyt funktiolla $g_k(t) = \min\{k, |t|^{-s}\} h_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, on vihjeen ominaisuudet. Lisäksi (g_k) on kasvava jono.

Nyt monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} I_s(\mu) &= \sup_k \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g_k(|x-y|) \, d(\mu \times \mu)(x,y) \\ &= \sup_k \lim_j \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g_k(|x-y|) \, d(\mu_j \times \mu_j)(x,y) \\ &\leq \liminf_j \sup_k \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g_k(|x-y|) \, d(\mu_j \times \mu_j)(x,y) \\ &= \liminf_j I_s(\mu_j). \end{aligned}$$

Yllä toinen yhtälö pätee, koska

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g_k(|x-y|)\, d\mu_j(x), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

on jatkuva ja kompaktikantajainen, ja epäyhtälö seuraa, koska kaikille reaalilukujonoille (a_{ij}) on

$$\sup_i \liminf_j a_{ij} \le \liminf_j \sup_i a_{ij}.$$

6. Olkoot $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $f : K \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään $M = \max_{x\in K}|f(x)|$ ja
$g(x) = \frac{1}{d(x,K)}\inf\{(f(y)+2M)|x-y| : y \in K\} - 2M$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$,
$g(x) = f(x)$, kun $x \in K$.
Osoita, että g on jatkuva ja $g(x) = f(x)$, kun $x \in K$.

Ratkaisu. Jos $f \equiv 0$, on myös $g \equiv 0$, joten voidaan olettaa $M > 0$.

Todetaan ensin funktion g jatkuvuus avoimessa joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$. Tätä varten riittää osoittaa, että funktio $h : \mathbb{R}^n \setminus K \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \inf\{(f(y)+2M)|x-y| : y \in K\},$$

on jatkuva. Ensinnäkin, funktion h määritelmässä infimum saavutetaan, koska K on kompakti. Kiinnitetään $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$, ja olkoon (x_i) sellainen jono joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$, jolle $x_i \to x_0$. Riittää osoittaa $\lim_i h(x_i) = h(x_0)$. Valitaan kaikilla $i \in \mathbb{N}_0$ piste $y_i \in K$, jolle

$$h(x_i) = (f(y_i)+2M)|x_i - y_i|.$$

Nyt

$$h(x_i) \le (f(y_0)+2M)|x_i - y_0| \to (f(y_0)+2M)|x_0 - y_0| = h(x_0),$$

joten $\limsup_i h(x_i) \le h(x_0)$. Toisaalta

$$\begin{aligned} h(x_0) \le (f(y_0)+2M)|x_0 - y_i| &\le (f(y_0)+2M)\left(|x_0 - x_i| + |x_i - y_i|\right) \\ &= h(x_i) + (f(y_0)+2M)|x_0 - x_i| \to h(x_i), \end{aligned}$$

joten $\liminf_i h(x_i) \le h(x_0)$. Siis $h(x_i) \to h(x_0)$, kun $i \to \infty$. Näin ollen h, ja siten myös g, on jatkuva joukossa $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Vielä tulee osoittaa, että g on jatkuva joukon K pisteissä. Koska $g|_K = f$ on jatkuva, riittää osoittaa $g(x_i) \to g(x_0)$ kun $x_i \to x_0$, missä $x_0 \in K$ and $x_i \notin K$.

Valitaan taas kaikilla $i \in \mathbb{N}$ piste $y_i \in K$, jolle

$$h(x_i) = (f(y_i) + 2M)|x_i - y_i|.$$

Koska

$$M|x_i - y_i| \le (f(y_i) + 2M)|x_i - y_i| \le (f(x_0) + 2M)|x_i - x_0| \le 3M|x_i - x_0| \to 0,$$

niin $|y_i - x_i| \to 0$ kun $i \to \infty$. Näin ollen $y_i \to x_0$ kun $i \to \infty$. Nyt

$$\begin{aligned} g(x_i) &= \frac{1}{d(x,K)}(f(y_i) + 2M)|x_i - y_i| - 2M \\ &\ge (f(y_i) + 2M) - 2M \\ &= f(y_i) \to f(x_0), \end{aligned}$$

joten $\liminf_i g(x_i) \ge f(x_0)$. Olkoon sitten $z_i \in K$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ se piste, jolle $(x_i, K) = |z_i - x_i|$. Nyt $|z_i - x_i| \le |x_0 - x_i| \to 0$, joten $z_i \to x_0$, kun $i \to \infty$. Saadaan

$$g(x_i) \le \frac{1}{d(x,K)}(f(z_i) + 2M)|x_i - z_i| - 2M = f(z_i) \to f(x_0),$$

joten $\limsup_i g(x_i) \le f(x_0)$. Siten $\lim g(x_i) = f(x_0) = g(x_0)$.