Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 3, mallit
26.9.2013

1.Osoita, että $\delta_{1/k}, k \in \mathbb{N}$, suppenee heikosti kohti δ_0:a, mutta joillekin Borelin joukoille $A \subset \mathbb{R}$ $\delta_{1/k}(A)$ ei suppene kohti $\delta_0(A)$:a. Tässä δ_a on Diracin mitta pisteessä $a \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Olkoon $f \in C_0(\mathbb{R})$ mielivaltainen. Tällöin

$$\int f\, d\delta_{1/k} = f(1/k) \to f(0) = \int f\, d\delta_0.$$

Siis $\delta_{1/k} \rightharpoonup \delta_0$.

Toisaalta, kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $1/k \in (0,1)$, mutta $0 \notin (0,1)$. Siten

$$\delta_{1/k}(0,1) = 1 \to 1 \neq 0 = \delta_0(0,1).$$

2. Olkoot $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n), f_j \geq 0, j = 0,1,2,\ldots$, siten, että $f_j \to f_0$ $L^1(\mathbb{R}^n)$:ssä. Määritellään $\mu_j(A) = \int f_j dm_n$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen. Osoita, että $\mu_j \to \mu_0$ heikosti.

Ratkaisu. Todetaan ensin, että kaikilla integroituvilla funktioilla h pätee

$$\int h\, d\mu_j = \int h f_j\, d\mu,$$

sillä suoraan määritelmän nojalla tämä pätee karakteristisille funktioille. Tavanomaisella tavalla kaava yleistyy tästä ensin yksinkertaisille, sitten positiivisille ja viimein mielivaltaisille integroituville funktioille.

Olkoon $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Nyt

$$\begin{aligned}\left|\int g\, d\mu_j - \int g\, d\mu\right| &= \left|\int g f_j\, dm_n - \int g f_0\, dm_n\right| \\ &= \left|\int g(f_j - f_0)\, dm_n\right| \\ &\leq ||g||_\infty ||f_j - f_0||_1 \to 0\end{aligned}$$

sillä oletuksen mukaan $f_j \to f_0$ L^1-normin mielessä. Koska funktio g oli mielivaltainen, pätee $\mu_j \rightharpoonup \mu$.

3. Olkoot $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots$ jatkuvia funktioita siten, että $\mathrm{supp}(g_j) \subset B(0, 1/j)$ ja $\int g_j dm_n = 1$. Osoita, että jos μ on Radonin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä (eli $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkojen σ-algebrassa), niin mitat μ_j,

$$\mu_j(A) = \int_A \mu * g_j dm_n, A \in Bor(\mathbb{R}^n),$$

suppenevat heikosti kohti mittaa μ. Konvoluutio $\mu * f$ määritellään kaavalla

$$\mu * f(x) = \int f(x-y) d\mu y.$$

Ratkaisu. Lisätään oletus $g_j \geq 0$.

Todetaan ensin, että μ_j on Radonin mitta kaikilla j, sillä se on Borelin mitta ja kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on

$$\begin{aligned} \mu_j(B(x_0,1)) &= \int_{B(x_0,1)} \mu * g_j \, dx = \int_{B(x_0,1)} \int g_j(x-y) \, d\mu(y) \, dx \\ &\leq ||g_j||_\infty \mu(B(x_0,1)) m_n(B(0,1)) < \infty. \end{aligned}$$

Olkoon $j \in \mathbb{N}$ ja $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Nyt konvoluutiotyyppisen funktion

$$\int_{B(0,1/j)} |f(x-y) - f(x)| g_j(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kantaja sisältyy joukkoon $K = \bar{B}(\mathrm{spt}\ f, 2)$, sillä tämän joukon ulkopuolella $f(x-y) = f(x)$ kaikilla $y \in B(0,1/j)$. Erityisesti siis sen integraali mittaa μ vastaan on äärellinen; tällä perusteella voidaan alla käyttää Fubinin lausetta:

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu_j - \int f \, d\mu \right| &= \left| \int f(y) \int g_j(x-y) \, d\mu(x) \, dy - \int f(x) \int g_j(y) \, dy \, d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int \left(\int f(y) g_j(x-y) \, dy - \int f(x) g_j(y) \, dy \right) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int \left(\int f(x-y) g_j(y) \, dy - \int f(x) g_j(y) \, dy \right) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int \left(\int f(x-y) g_j(y) \, dy - \int f(x) g_j(y) \, dy \right) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int \int_{B(0,1/j)} (f(x-y) - f(x)) g_j(y) \, dy \, d\mu(x) \right| \\ &\leq \int \int_{B(0,1/j)} |f(x-y) - f(x)| g_j(y) \, dy \, d\mu(x). \end{aligned}$$

Kiinnitetään $\delta > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, löytyy $j_0 \in \mathbb{N}$, jolle $|f(z) - f(x)| < \delta$ aina kun $|z - x| < 1/j_0$. Tällöin kaikilla $j \geq j_0$, kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $y \in B(0, 1/j)$ pätee $|f(x - y) - f(x)| < \delta$. Erityisesti kaikilla $j \geq j_0$ pätee

$$\int \int_{B(0,1/j)} |f(x-y)-f(x)| g_j(y)\, dy\, d\mu(x) \leq \delta \int_K \int_{B(0,1/j)} g_j(y)\, dy\, d\mu(x) \leq \delta\mu(K).$$

Koska $\mu(K) < \infty$ ja $\delta > 0$ oli mielivaltainen, $\int f\, d\mu_j \to \int f\, d\mu$. Siis $\mu_j \rightharpoonup \mu$.

Seuraavassa X on $\mathbb{R}^n$:n kompakti osajoukko ja $\mathcal{M}$ on kaikkien X:n Radonin todennäköisyysmittojen (ts. $\mu(X) = 1$) joukko.

4. Osoita, että d,

$$d(\mu, \nu) = \sup\{|\int f d\mu - \int f d\nu| : f : X \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitz}\},$$

on metriikka $\mathcal{M}$:ssä. (f 1-Lipschitz: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ kaikille $x, y \in X$.)

Ratkaisu. Todetaan aluksi, että jos $f \colon X \to \mathbb{R}$ on L-Lipschitz, on myös $f - a$ L-Lipschitz kaikilla $a \in \mathbb{R}$, ja f/L on 1-Lipschitz.

Olkoon $\mu, \nu, \sigma \in \mathcal{M}$. Selvästi d on symmetrinen. Jos $f \colon X \to \mathbb{R}$ on 1-Lipschitz, on

$$\left| \int f\, d\mu - \int f\, d\nu \right| \leq \left| \int f\, d\mu - \int f\, d\sigma \right| + \left| \int f\, d\sigma - \int f\, d\nu \right|$$

Ottamalla ensin oikealla puolella supremum 1-Lipschitz-kuvausten suhteen ja sen jälkeen vasemmalla saadaan kolmioepäyhtälö.

Jos $\mu = \nu$, kaikilla 1-Lipschitz-kuvauksilla $f \colon X \to \mathbb{R}$ pätee

$$\int f\, d\mu - \int f\, d\mu = 0,$$

joten $d(\mu, \nu) = 0$. Oletetaan sitten $d(\mu, \nu) = 0$, jolloin $\int f\, d\mu = \int f\, d\nu$ kaikilla Lipschitz-kuvauksilla f. Jos $K \in X$ on kompakti, voidaan sen karakterististista funktiota χ_K approksimoida pisteittäin kasvavalla jonolla (h_i) Lipshitz-funktioita. Tällöin

$$\mu(K) = \lim_i \int h_i\, d\mu = \lim_i \int h_i\, d\nu = \nu(K).$$

Nyt Radon-mittojen ominaisuuksista seuraa $\mu(A) = \nu(A)$ kaikilla Borel-joukoilla $A \subset X$, joten $\mu = \nu$.

Siis d on metriikka.

5. Osoita, että jos $\mu_j, \mu \in \mathcal{M}$ ja $d(\mu_j, \mu) \to 0$, niin $\mu_j \to \mu$ heikosti.

Ratkaisu. Olkoon $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Nyt tarkoituksena on approksimoida funktiota f Lipschitz-kuvauksilla. Tämän vaiheen voi suorittaa esimerkiksi Tietzen jatkolauseen ja konvoluution avulla tai käyttämällä Weierstrassin approksimaatiolausetta.

Weierstrassin approksimaatiolauseen nojalla voidaan valita polynomit $p_i \colon X \to \mathbb{R}$, joille $||p_i - f||_\infty \to 0$. Erityisesti kompaktissa joukossa X jokainen p_i on L_i-Lipschitz jollain $L_i > 0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $i \in \mathbb{N}$, jolle $||p_i - f||_\infty < \varepsilon$, ja $j_0 \in \mathbb{N}$, jolle kaikilla $j \geq j_0$ pätee

$$\left| \int p_i \, d\mu_j - \int p_i \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Nyt kaikilla $j \geq j_0$ pätee

$$\left| \int f \, d\mu_j - \int f \, d\mu \right| \leq \left| \int f \, d\mu_j - \int p_i \, d\mu_j \right| + \left| \int p_i \, d\mu_j - \int p_i \, d\mu \right| + \left| \int f \, d\mu - \int p_i \, d\mu \right| < 3\varepsilon.$$

Siis väite pätee.

6. Osoita, että jos $\mu_j, \mu \in \mathcal{M}$ ja $\mu_j \to \mu$ heikosti, niin $d(\mu_j, \mu) \to 0$.

Ratkaisu. Tehdään vastaoletus: jollakin $r > 0$ pätee $d(\mu_j, \mu) \geq r$. Erityisesti tällöin jokaisella $j \in \mathbb{N}$ löytyy 1-Lipschitz-kuvaus $f_j \colon X \to \mathbb{R}$, jolle

$$\left| \int f_j \, d\mu_j - \int f_j \, d\mu \right| \geq r.$$

Olkoon $\{q_1, q_2, \dots\}$ tiheä, numeroituva X:n osajoukko. Koska X on kompakti, löytyy jonon (f_j) osajono $(f_{1,j})$, jolle $(f_{1,j}(q_1))$ suppenee johonkin pisteeseen $f(q_1)$. Vastaavasti löytyy jonon $(f_{1,j})$ osajono $(f_{2,j})$, jolle $(f_{2,j}(q_2))$ suppenee johonkin pisteeseen $f(q_2)$. Jatkamalla tätä prosessia löytyy kaikilla $k \in \mathbb{N}$ jonon $(f_{k-1,j})$ osajono $(f_{k,j})$, jolle $(f_{k,j}(q_2))$ suppenee pisteeseen $f(q_k)$. Valitsemalla nyt osajono $(f_{j,j})$ saadaan funktiojono, joka suppenee kaikilla q_k, $k \in \mathbb{N}$. Erityisesti saatu funktio $f \colon \{q_1, q_2, \dots\} \to \mathbb{R}$ on 1-Lipschitz.

Nyt f jatkuu koko joukkoon X, ja sille pätee dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\left| \int f \, d\mu_j - \int f \, d\mu \right| = \lim_j \left| \int f_j \, d\mu_j - \int f_j \, d\mu \right| \geq r.$$

Siis $\mu_j \not\rightharpoonup \mu$, mikä on ristiriita. Väite seuraa.