Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 2, mallit
19.9.2013

1. Osoita, että Hausdorffin mitan $\mathcal{H}^s$ määritelmässä voidaan käyttää avoimien joukkojen peitteitä ja saadaan sama lopputulos.

Ratkaisu. Merkitään avoimien peitteiden antamaa Hausdorffin mittaa $\mathcal{A}^s$, ja olkoon A mielivaltainen joukko. Koska jokainen avoimista joukoista koostuva δ-peite on yleisessä mielessä δ-peite, infimumin ominaisuuksista seuraa

$$\mathcal{A}^s_\delta(A) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Toisaalta joukon A mielivaltaiselle δ-peitteelle $\{E_i\}$ löytyy avoimista joukoista koostuva peite $\{G_i\}$, jolle $E_i \subset G_i$ ja $d(G_i) \leq (1+\varepsilon)d(E_i)$ mielivaltaisella $\varepsilon > 0$. (Valitaan esimerkiksi $G_i = \{x\colon d(x, E_i) < \varepsilon d(E_i)/2\}$.) Siten kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$\mathcal{A}^s_{(1+\varepsilon)\delta}(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Väite seuraa, nyt antamalla $\delta \to 0$.

2. Määritellään Hausdorffin kuulamitta $\mathcal{S}^s$ kuten Hausdorffin mitta, mutta käytetään peittävinä joukkoina kuulia. Osoita, että kaikilla $A \subset X$ on

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{S}^s(A) \leq 2^s\mathcal{H}^s(A).$$

Ratkaisu. Olkoon $A \subset X$. Koska jokainen kuulista koostuva δ-peite on myös tavallisessa mielessä δ-peite, seuraa infimumin ominaisuuksista kaikilla $\delta > 0$ epäyhtälö

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{S}^s_\delta(A).$$

Toisaalta, kun $\delta > 0$ on kiinnitetty, jokaista δ-peitettä $\{E_i\}$ kohden löytyy kuulista koostuva 2δ-peite $\{B_i\}$, joille $E_i \subset B_i$ ja $d(B_i) \leq 2d(E_i)$. (Valitaan $B_i = B(x_i, d(E_i))$, missä $x_i \in E_i$.) Näin ollen

$$\mathcal{S}^s_{2\delta}(A) \leq 2^s\mathcal{H}^s_\delta(A),$$

josta jälleen väite seuraa, kun $\delta \to 0$.

3. Osoita, että kaikilla $0 < s < \infty$ ja kaikilla $0 < \delta \leq \infty$ on $\mathcal{H}^s(A) = 0$ jos ja vain jos $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$.

Ratkaisu. Kiinnitetään $0 < s < \infty$ ja $0 < \delta \leq \infty$. Jos $\mathcal{H}^s(A) = 0$, silloin määritelmän nojalla on

$$0 \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \mathcal{H}^s(A) = 0.$$

Toisaalta, jos pätee $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$, löytyy jokaisella $0 < \varepsilon < \delta$ joukon A δ-peite $\{E_i\}$, jolle

$$\sum_i d(E_i)^s < \varepsilon^s.$$

Erityisesti tällöin kaikilla i on $d(E_i) \le \varepsilon$, joten $\{E_i\}$ on myös ε-peite. Antamalla $\varepsilon \to 0$ nähdään

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = 0$$

kaikilla $0 < \varepsilon < \delta$. Siis väite pätee.

4. Osoita, että $\dim l^2 = \infty$, dim on Hausdorffin dimensio.

Ratkaisu. Oletetaan tunnetuksi $\dim \mathbb{R}^n = n$ kaikilla $n \ge 1$.

Tyhjennetään jonoavaruus l^2 joukoilla

$$A_j = \{(x_i) \in l^2 \colon x_i = 0 \,\forall i \ge j\}, \quad j \ge 1,$$

ja määritellään kuvaukset $\varphi_j \colon A_j \to \mathbb{R}^j$, $j \ge 1$, asettamalla

$$\varphi_j((x_i)) = (x_1, \dots, x_j).$$

Nyt jokainen φ_j on bijektiivinen isometria, joten erityisesti

$$\dim A_j = \dim \mathbb{R}^j = j.$$

Toisaalta $l^2 = \bigcup_j A_j$, joten Hausdorffin dimension ominaisuuksista seuraa

$$\dim l^2 = \sup_{j \ge 1} \dim A_j = \infty,$$

kuten haluttiin.

5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $f \colon X \to Y$ Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha > 0$ ja vakiolla L, ts.

$$d(f(x), f(y)) \le L d(x,y)^\alpha \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Osoita, että

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le L^s \mathcal{H}^{\alpha s}(A)$$

ja

$$\dim f(A) \le \frac{1}{\alpha} \dim A$$

kaikilla $A \subset X$ ja kaikilla $0 \le s < \infty$.

Ratkaisu. Olkoon $A \subset X$ ja $0 \le s < \infty$. Jos $\mathcal{H}^{\alpha s}(A) = \infty$, mittojen epäyhtälö pätee selvästi; voi siis olettaa $\mathcal{H}^{\alpha s}(A) < \infty$.

Olkoon $\delta > 0$. Oletuksen nojalla on myös $\mathcal{H}^{\alpha s}_\delta(A) < \delta$, joten löytyy joukon A δ-peite $\{E_i\}$, jolle

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^{\alpha s} \le \mathcal{H}^{\alpha s}_\delta(A) + \delta.$$

Kaikilla $i \in \mathbb{N}$ funktion f Hölder-jatkuvuudesta seuraa

$$d(fE_i) \le L d(E_i)^\alpha \le L\delta^\alpha,$$

joten $\{fE_i\}$ on fA:n $L\delta^\alpha$-peite. Nyt

$$\mathcal{H}^s_{L\delta^\alpha}(fA) \le \sum_{i \in \mathbb{N}} d(fE_i)^s \le L^s \sum_{i \in \mathbb{N}} d(E_i)^{\alpha s},$$

josta ottamalla infimum peitteiden $\{E_i\}$ suhteen ja antamalla sitten $\delta \to 0$ saadaan haluttu epäyhtälö

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le L^s \mathcal{H}^{\alpha s}(A).$$

Jos $\dim A = \infty$, jälkimmäinen arvio pätee selvästi, joten voi olettaa $\dim A < \infty$. Olkoon $s > \frac{1}{\alpha} \dim A$. Tällöin Hausdorffin dimension määritelmän nojalla $\mathcal{H}^{\alpha s}(A) = 0$, joten tehtävän alkuosan nojalla on $\mathcal{H}^s(fA) = 0$. Edelleen dimension määritelmästä saadaan $s \ge \dim(fA)$. Koska $s > \frac{1}{\alpha} \dim A$ oli mielivaltainen, pätee

$$\dim f(A) \le \frac{1}{\alpha} \dim A,$$

kuten vaadittiin.

6. Osoita, että jos $A \subset X$ ja $0 \le s < \infty$ ja on olemassa ulkomitta μ X:ssä siten, että $\mu(A) > 0$ ja $\mu(B(x, r)) \le r^s$ kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) > 0$.

Ratkaisu. Olkoon A, s ja μ kuten oletuksissa. Tehtävän 2 nojalla riittää osoittaa

$$\mathcal{S}^s(A) > 0,$$

missä $\mathcal{S}^s$ on tehtävässä 2 määritelty ulkomitta.

Olkoon $\{\bar{B}(x_i, r_i)\}$ joukon A mielivaltainen δ-peite, $\delta > 0$; tässä voi olla $r_i = 0$, jolloin $\bar{B}(x_i, 0) = \{x_i\}$. Nyt ulkomitan μ ominaisuuksien perusteella

$$0 < \mu(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(\bar{B}(x_i, r_i)) \le \sum_{i=1}^\infty r_i^s.$$

Toisaalta, koska peitteen kuulat ovat suljettuja, pätee $d(\bar{B}(x_i, r_i)) \geq r_i$. Siis

$$\mathcal{S}^s_\delta(A) \geq \mu(A) > 0,$$

josta antamalla $\delta \to 0$ saadaan

$$\mathcal{S}^s(A) > 0.$$

Siis väite pätee.

7. Osoita, että $\dim \mathbb{R} = 2$, kun metriikka d $\mathbb{R}$:ssä määritellä siten, että

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|}.$$

Ratkaisu. Oletetaan tunnetuksi, että euklidisella metriikalla varustetulle $\mathbb{R}$:lle on $\dim \mathbb{R} = 1$. Nyt identiteettikuvaus $id \colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, d)$ on 1-Hölder-jatkuva eksponentilla α, joten tehtävän 5 nojalla pätee

$$\dim(\mathbb{R}, d) \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} \dim \mathbb{R} = 2.$$

Toisaalta identiteettikuvaus $id \colon (\mathbb{R}, d) \to \mathbb{R}$ on 1-Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha = 2$. Siis

$$1 = \dim \mathbb{R} \leq \frac{1}{2} \dim(\mathbb{R}, d).$$

Yhdistämällä epäyhtälöt saadaan

$$2 \leq \dim(\mathbb{R}, d) \leq 2,$$

joten väite pätee.