**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Reaalianalyysi II**
**Harjoitus 1**
**12.-13.9.2013**

1. Olkoon $\mu$ metrisen avaruuden $X$ ulkomitta, jolle Borelin joukot ovat mitallisia. Todista, että $\mu$ on metrinen.

*Ratkaisu.* Olkoot $A, B \subset X$ sellaisia joukkoja, joille $d(A, B) > 0$, toisin sanoen löytyy sellainen $\varepsilon > 0$, jolle $d(a, b) > \varepsilon$ kaikilla $a \in A$ ja $b \in B$; tässä $d$ viittaa avaruuden $X$ metriikkaan.

Määritellään joukot $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$ ja $E = A \cup B$. Tällöin

$$E \cap A_\varepsilon = A, \quad E \setminus A_\varepsilon = B,$$

ja $A_\varepsilon$ on avointen kuulien $B(a, \varepsilon), a \in A$ yhdisteenä avoin joukko, ja siten $\mu$-mitallinen, sillä $\mu$ oli Borel-ulkomitta. Carathéodoryn ehdosta seuraa siis

$$\mu(A \cup B) = \mu(E) = \mu(E \cap A_\varepsilon) + \mu(E \setminus A_\varepsilon) = \mu(A) + \mu(B).$$

Koska joukot $A, B$ olivat mielivaltaiset, $\mu$ on metrinen.

2. Olkoon $\mu$ joukon $X$ ulkomitta ja $f : X \to Y$ mielivaltainen kuvaus. Määritellään kuvaulkomitta (push forward) asettamalla $f_\# \mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, kun $A \subset Y$. Osoita, että $f_\# \mu$ on ulkomitta siten, että $A \subset Y$ on $f_\# \mu$-mitallinen, kun $f^{-1}(A)$ on $\mu$-mitallinen. Erityisesti $f_\# \mu$ on Borelin ulkomitta (eli Borelin joukot ovat mitallisia), jos $X$ ja $Y$ ovat metrisiä avaruuksia, $\mu$ on Borelin ulkomitta ja $f$ on jatkuva. Mitä vaikeuksia on määritelmässä $f^\# \nu(A) = \nu(f(A))$, kun $A \subset X$ ja $\nu$ joukon $Y$ ulkomitta?

*Ratkaisu.* Osoitetaan ensin, että $f_\# \mu$ on ulkomitta. Selvästi

$$f_\# \mu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Olkoot sitten $A, A_1, A_2, \dots \in Y$ sellaiset, joille $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Silloin

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \bigcup_{i=1}^\infty f^{-1}(A_i),$$

joten ulkomitan $\mu$ subadditiivisuudesta seuraa

$$f_\# \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(f^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^\infty f_\# \mu(A_i).$$

Olkoon sitten $A \subset Y$ sellainen joukko, jolle $f^{-1}(A)$ on mitallinen, ja $E \subset Y$ mielivaltainen joukko. Nyt pätee

$$f^{-1}(E) \cap f^{-1}(A) = f^{-1}(E \cap A), \quad f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(E \setminus A),$$

joten Carathéodoryn ehdosta saadaan

$$\begin{aligned} f_{\#}\mu(E) &= \mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(E) \cap f^{-1}(A)) + \mu(f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(A)) \\ &= \mu(f^{-1}(E \cap A)) + \mu(f^{-1}(E \setminus A)) \\ &= f_{\#}\mu(E \cap A) + f_{\#}\mu(E \setminus A). \end{aligned}$$

Siis $A$ on $f_{\#}\mu$-mitallinen. Jos lisäksi $X$ ja $Y$ ovat metrisiä, $\mu$ Borel ja $f$ jatkuva, ovat kaikkien avaruuden $Y$ Borel-joukkojen alkukuvat avaruuden $X$ Borel-joukkoja, ja siten mitallisia; siis $f_{\#}\mu$ on myös Borel.

Viimeinen määritelmä antaa ulkomitan (pullback); sen todentaminen on samanlainen päättely kuin yllä. Koska kuitenkin voi olla

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B),$$

mitallisuus ei siirry samaan tapaan.

3. Olkoon $\mu$ metrisen avaruuden $X$ ulkomitta. Määritellään $\mu$:n kantaja (support)

$$\operatorname{spt} \mu = X \setminus \bigcup \{V : V \subset X \text{ avoin ja } \mu(V) = 0\}.$$

Osoita, että

$$\operatorname{spt} \mu = \{x \in X : \mu(B(x,r)) > 0 \text{ kaikilla } r > 0\}.$$

Osoita lisäksi, että jos $X$ on separoituva (eli $X$:ssä on numeroituva tiheä osajoukko), niin $\operatorname{spt} \mu$ on pienin suljettu joukko $F$, jolle $\mu(X \setminus F) = 0$. Päteekö tämä ilman separoituvuusoletusta?

*Ratkaisu.* Olkoon ensin $x \in \operatorname{spt} \mu$. Jos jollain $r > 0$ pätee $\mu(B(x,r)) = 0$, niin $x$ kuuluu avoimeen, nollamittaiseen joukkoon ja siten

$$x \in \bigcup \{V : V \subset X \text{ avoin ja } \mu(V) = 0\};$$

tämä on ristiriita, joten $\mu(B(x,r)) > 0$ kaikilla $r > 0$.

Oletetaan sitten, että pisteelle $x \in X$ pätee $\mu(B(x,r)) > 0$ kaikilla $r > 0$. Jos $V \subset X$ on avoin joukko ja $x \in V$, niin erityisesti löytyy $r_0 > 0$, jolle $B(x,r_0) \subset V$. Erityisesti siis $\mu(V) \geq \mu(B(x,r_0)) > 0$. Tästä seuraa

$$\operatorname{spt} \mu = \{x \in X : \mu(B(x,r)) > 0 \text{ kaikilla } r > 0\}.$$

Oletetaan vielä, että $X$ on separoituva, ja $F \subset \mathbb{R}$ on pienin suljettu joukko, jolle, $\mu(X \setminus F) = 0$. Tällöin erityisesti $X \setminus F$ kuuluu mitan kantajan määritelmässä mainittuun joukkoon $\mathcal{V} = \{V : V \subset X \text{ avoin ja } \mu(V) = 0\}$, minkä seurauksena

$$F = X \setminus X \setminus F \subset \operatorname{spt} \mu.$$

Sisältymisen toiseen suuntaan osoittamiseksi riittää näyttää

$$\mu(\bigcup \mathcal{V}) = 0.$$

Koska $X$ on separoituva, voidaan kirjoittaa $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$, missä $\mu(B(x_i, r_i)) = 0$ kaikilla $i \geq 1$. Erityisesti siis

$$\mu(X \setminus \operatorname{spt} \mu) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(x_i, r_i)) = 0,$$

joten $F = \operatorname{spt} \mu$.

Separoituvuus on välttämätön oletus: Varustetaan $\mathbb{R}$ diskreetillä metriikalla $d$, jolloin jokainen yksiö on avoin, ja Lebesguen ulkomitalla $m^*$. Koska $B_d(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ ja $m^*(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on $\operatorname{spt} m^* = \emptyset$. Kuitenkin $m^*(\mathbb{R} \setminus \operatorname{spt} m^*) = m^*(\mathbb{R}) = \infty$.

4. Anna esimerkki $\mathbb{R}$:n Borelin ulkomitasta $\mu$, jolle $\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{Q}) = 1$ ja $\mu$:n kantaja on $\mathbb{R}$.

*Ratkaisu.* Kirjoitetaan $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, ja määritellään joukkofunktio $\mu \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ asettamalla

$$\mu(A) = \sum_{q_k \in A} 2^{-k}, \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Nyt $\mu$ on ulkomitta, sillä

$$\mu(\emptyset) = \sum_{q_k \in \emptyset} 2^{-k} = 0,$$

ja jos $A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \mathbb{R}$, niin

$$\mu(A) = \sum_{q_k \in A} 2^{-k} \leq \sum_{q_k \in \bigcup A_i} 2^{-k} \leq \sum_i \sum_{q_k \in A_i} 2^{-k} = \sum_i \mu(A_i).$$

Sen todistamiseksi, että $\mu$ on Borelin ulkomitta, riittää näyttää, että jokainen suljettu $F \in \mathbb{R}$ on mitallinen. Olkoon siis $F \subset \mathbb{R}$ suljettu, ja $E \subset \mathbb{R}$

mielivaltainen. Nyt selvästi jokainen rationaaliluku $q_k \in E$ kuuluu täsmälleen yhteen joukoista $E \cap F$ ja $E \setminus F$, joten

$$\mu(E) = \sum_{q_k \in E} 2^{-k} = \sum_{q_k \in E \cap F} 2^{-k} + \sum_{q_k \in E \setminus F} 2^{-k} = \mu(E \cap F) + \mu(E \setminus F).$$

Siis Carathéodoryn ehdon nojalla $\mu$ on Borelin ulkomitta.

Lisäksi

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{Q}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

ja jokaiselle avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{R}$ on $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, joten $\mu(V) > 0$ ja siten $\operatorname{spt} \mu = \mathbb{R}$.

5. Olkoot $X$ ja $Y$ separoituvia metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ jatkuva. Osoita, että $f(\operatorname{spt} \mu) \subset \operatorname{spt} f_\# \mu$. Osoita lisäksi, että jos $\operatorname{spt} \mu$ on kompakti, niin $f(\operatorname{spt} \mu) = \operatorname{spt} f_\# \mu$.

*Ratkaisu.* Tehtävän 3 nojalla pätee

$$\mu\left(X \setminus f^{-1}(\operatorname{spt} f_\# \mu)\right) = f_\# \mu(Y \setminus \operatorname{spt} f_\# \mu) = 0,$$

joten $X \setminus f^{-1}(\operatorname{spt} f_\# \mu) \subset X \setminus \operatorname{spt} \mu$ funktion $f$ jatkuvuuden nojalla. Siis

$$f(\operatorname{spt} \mu) \subset f\left(f^{-1}(\operatorname{spt} f_\# \mu)\right) \subset \operatorname{spt} f_\# \mu.$$

Jos lisäksi $\operatorname{spt} \mu$ on kompakti, funktion $f$ jatkuvuuden nojalla myös joukko $f(\operatorname{spt} \mu)$ on kompakti, erityisesti suljettu. Lisäksi

$$f_\# \mu(Y \setminus f(\operatorname{spt} \mu)) = \mu\left(X \setminus f^{-1}(f(\operatorname{spt} \mu))\right) \leq \mu(X \setminus \operatorname{spt} \mu) = 0,$$

joten tehtävän 4 nojalla $f(\operatorname{spt} \mu) = \operatorname{spt} f_\# \mu$.