Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 10
28.11.2013

1. Osoita, että $f \in BMO$, kun $f(x) = \log|x|, x \in \mathbb{R}^n$.

Ratkaisu. Koska

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,1)} |\log|x||\,dm(x) &= \omega_{n-1}\int_0^1 r^{n-1}|\log r|\,dr \\
&= \omega_{n-1}\int_{-\infty}^0 e^{nt}(-t)\,dt \\
&= \frac{\omega_{n-1}}{n^2}\int_0^\infty e^{-u}u\,du = \frac{\omega_{n-1}}{n^2}\Gamma(2) < \infty
\end{aligned}$$

on $f \in L^1_{lok}$ (muissa kompakteissa joukoissa f on jatkuvana rajoitettu). Kurssin tietojen perusteella

$$\int_Q |f - f_Q| \le 2\int_Q |f - a|,$$

missä $a \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen. Toisaalta muuttujan skaalaaminen $x \mapsto \delta x$ muuttaa funktiota f vain lisätyllä vakiolla:

$$\int_Q |f(\delta x)| \le \int_Q |f(x) + \log\delta|.$$

Riittää siis tarkastella kuutioita $Q(x_0, 1)$, joiden keskipiste on x_0 ja sivun pituus 1. Nyt, jos $|x_0| \le 1$, on $Q(x_0) \subset B(0,2)$, joten

$$\int_{Q(x_0)} |\log|x||\,dm_n \le \int_{B(0,2)} |\log|x||\,dm_n = \omega_{n-1}2\log 2.$$

Vastaavasti, jos $|x_0| \ge 1$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{Q(x_0)} |\log|x| - \log|x_0||\,dm_n &\le \int_{Q(x/|x_0|,1/|x_0|)} |\log|x||\,dm_n \\
&\le \int_{B(0,2)} |\log|x||\,dm_n = \omega_{n-1}2\log 2.
\end{aligned}$$

Siis $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

2. Onko $f \in BMO$, missä $f(x) = \log|x|$, kun $x \in \mathbb{R}, x > 0$, ja $f(x) = -\log|x|$, kun $x \in \mathbb{R}, x < 0$?

Ratkaisu. Osoitetaan $f \notin BMO$. Koska f on antisymmetrinen, sen integraali yli välien $[-r,r]$, $0 < r < 1$, häviää. Niinpä

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |f(t) - f_{[-r,r]}|\,dt = \frac{1}{r}r(1-\log r) \to^{r\to 0} \infty.$$

Siis $f \notin BMO$.

3. Osoita, että $f \notin BMO$, kun $f(x) = |\log|x||^p, x \in \mathbb{R}^n, 1 < p < \infty$.

Ratkaisu. Koska BMO-kuvaukset voidaan määritellä yhtäpitävästi kuulien avulla, käytetään alla kuulia yksinkertaisuuden vuoksi.

Tarkastellaan funktiota f yksikkökuulassa $B = B(0,1)$ ja osoitetaan, ettei Johnin-Nirenbergin epäyhtälö päde. Vastaavasti kuin tehtävässä 1 nähdään

$$f_B = \frac{1}{m_n(B)}\int_B f(x) = \frac{\omega_{n-1}}{m_n(B)n^{p+1}}\int_0^{-\infty} e^{-u}u^p\,du = \frac{\omega_{n-1}}{m_n(B)n^{p+1}}\Gamma(p+1),$$

joten erityisesti $f \in L^1_{lok}$.

Koska $f(x) \to \infty$, $|x| \to 0$, voidaan olettaa, että $\lambda > f_B$ on niin suuri, että $f(x) > f_B$, kun $|f(x) - f_B| > \lambda$, $x \in B$. Tällöin erityisesti

$$|\log|x||^p > \lambda + f_B,$$

joten

$$|x| \le \exp(-(\lambda + f_B)^{1/p})$$

Siten suurilla λ on

$$\begin{aligned} m_n(\{x \in B : |f - f_B| > \lambda\}) &= m_n(\{x \in B : |x| \le \exp(-(\lambda + f_B)^{1/p})\}) \\ &= m_n(B)\exp(-n(\lambda + f_B)^{1/p}). \end{aligned}$$

Jos nyt $C > 0$ on vakio, löytyy $\lambda_0 > 0$, jolle

$$\exp(-n(\lambda_0 + f_B)^{1/p}) > \exp(-C\lambda_0).$$

Erityisesti siis Johnin-Nirenbergin epäyhtälö ei päde funktiolle f, joten $f \notin BMO$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokaalisti integroituva siten, että on olemassa positiiviset vakiot C_1 ja C_2, joille pätee

$$m_n(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}) \le C_1 e^{-C_2\lambda} m_n(Q)$$

kaikille kuutioille $Q \subset \mathbb{R}^n$ ja kaikille $\lambda > 0$. Todista, että $f \in BMO$.

Ratkaisu. Olkoon $Q \subset \mathbb{R}^n$ kuutio. Nyt on

$$\begin{aligned}\int_Q |f - f_Q| \, dm_n &= \int_0^\infty m_n(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}) \, d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty C_1 e^{-C_2 \lambda} m_n(Q) \, d\lambda = C m_n(Q),\end{aligned}$$

missä $C = C_1/C_2$. Ottamalla supremum yli kuutioiden Q saadaan väite.

5. Todista, että jos $f \in BMO$, niin $f \in L^p_{lok}$ kaikilla $1 \leq p < \infty$ ja on olemassa vain n:stä ja p:stä riippuvat positiiviset vakiot c ja C siten, että

$$c\|f\|_* \leq \|f\|_{*,p} \leq C\|f\|_*,$$

missä

$$\|f\|_{*,p} = \sup\{ \left(m_n(Q)^{-1} \int_Q |f - f_Q|^p \right)^{1/p} : Q \subset \mathbb{R}^n \text{ kuutio}\}.$$

Ratkaisu. Olkoon $f \in BMO$ ja $Q \subset \mathbb{R}^n$ kuutio. Koska $f \in L^p_{lok}$, jos $f - a \in L^p_{lok}$, $a \in \mathbb{R}$, riittää osoittaa oikeanpuoleinen epäyhtälö normeille. Nyt Johnin-Nirenbergin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\int_Q |f - f_Q|^p &= p \int_0^\infty t^{p-1} m_n(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > t\}) \, dt \\ &\leq p \int_0^\infty t^{p-1} C_1 e^{-C_2 t/\|f\|_*} m_n(Q) \, dt \\ &= C_1 p \left(\frac{\|f\|_*}{C_2} \right)^p m_n(Q) \Gamma(p) \\ &= C(p, n) \|f\|_*^p m_n(Q),\end{aligned}$$

mistä oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa.

Koska nyt $|f - f_Q| \in L^p_{lok}$, vasemmanpuoleinen epäyhtälö seuraa Hölderin epäyhtälöstä:

$$\int_Q |f - f_Q| \leq m(Q) \left(m_n(Q)^{-1} \int_Q |f - f_Q|^p \right)^{1/p}.$$