Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 9
21.11.2013

1. Olkoon $\emptyset \neq A \subset X$, (X, d) on metrinen avaruus. Osoita, että $x \mapsto d(x, A)$ on Lipschitz-funktio.

2. Olkoon $C \subset [0, 1]$ Cantorin 1/3-joukko. Konstruoi Lipschitz-funktio $f : C \to \mathbb{R}$, joka ei ole derivoituva missään C:n pisteessä.

3. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz, missä $A \subset X$. Määritellään $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \inf\{f(y) + Lip(f)d(x, y) : y \in A\}, x \in X.$$

Osoita, että g on Lipschitz, $Lip(g) = Lip(f)$ ja $g(x) = f(x)$, kun $x \in A$.

4. Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos on olemassa joukot $A_i \subset \mathbb{R}^m, i = 1, 2, \ldots, B \subset \mathbb{R}^n$ ja Lipschitz-kuvaukset $f_i : A_i \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots$, siten että $\mathcal{H}^m(B) = 0$ ja $E = \cup_{i=1}^{\infty} f_i(A_i) \cup B$. Todista, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos ja vain jos on olemassa Lipschitz-kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots$, siten että

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

5. Todista, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on m-suoristuva, jos ja vain jos on olemassa jatkuvasti differentioituvat kuvaukset $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \ldots$, siten että

$$\mathcal{H}^m(E \setminus \cup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^m)) = 0.$$

6. Kompaktin joukon $C \subset X$ Minkowskin (ylä)dimensio on

$$\dim_M C = \inf\{s \geq 0 : \lim_{\delta \to 0} N(C, \delta)\delta^s = 0\},$$

missä $N(C, \delta)$ on pienin luonnollinen luku k siten, että C voidaan peittää k:lla δ-säteisellä kuulalla. Todista, että jos $f : X \to Y$ on Lipschitz, niin $\dim_M f(C) \leq \dim_M C$.