Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 8
14.11.2013

Seuraavassa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Jatkuvuus ei ole oleellista, mutta se helpottaa joitakin yksityiskohtia. Tehtävissä 1-4 f on lisäksi kasvava.

1. Osoita, että jos f on kasvava niin on olemassa Radon-mitta $\mu_f : Bor([0,1]) \to [0,\infty)$ siten, että

$$\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a) \text{ kaikilla } 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

2. Osoita, että μ_f jatkuva mitta, ts. $\mu_f(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita myös kääntäen, että jokainen jatkuva Radon-mitta $\mu : Bor([0,1]) \to [0,\infty)$ on muotoa $\mu = \mu_f$, missä f on kasvava ja jatkuva.

3. Osoita, että jos f on Cantorin funktio, niin μ_f ja Lebesguen mitta ovat keskenään singulaariset.

4. Osoita, että f on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain jos μ_f on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen.

5. Osoita, että jos f on rajoitetusti heilahteleva, niin on olemassa merkkimitta $\mu_f : Bor(R) \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\mu_f([a,b]) = f(b) - f(a) \text{ kaikilla } a < b, a, b \in \mathbb{R}.$$

6. Osoita, että jos $\mu : Bor([0,1]) \to \mathbb{R}$ on merkkimitta, niin $f : x \mapsto \mu([0,x]), x \in [0,1]$, on rajoitetusti heilahteleva ja $V_f([0,1]) \leq V(\mu,[0,1])$.

(Itse asiassa tässä pätee yhtälö. Mieti miksi, jos haluat.)