Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 7
7.11.2013

Seuraavassa $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on merkkimitta, missä $\mathcal{M}$ on joukon X σ-algebra.

1. Osoita, että jos $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$ ja $\mu(A) = \infty$, niin $\mu(B) = \infty$.

2. Osoita, että μ ei voi saada molempia arvoja ∞ ja $-\infty$.

3. Osoita, että Jordanin hajoitelman mitat μ^+ ja μ^- ovat yksikäsitteisesti määrätyt.

4. Osoita, että jos $\nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ on mitta, niin $\mu << \nu$, jos ja vain jos $V(\mu, .) << \nu$.

Seuraavassa $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ on mitta. Joukko $A \in \mathcal{M}$ on μ:n atomi, jos $\mu(A) > 0$ ja kaikille $B \in \mathcal{M}, B \subset A$, on joko $\mu(B) = 0$ tai $\mu(B) = \mu(A)$.

5. Mitä ovat Lebesgue'n mitan ja laskentamitan atomit?

6. Osoita, että jokaisen $\mathbb{R}$:n Radon-mitan μ atomit ovat melkein yksiöitä, eli jokaiselle μ:n atomille A on olemassa $a \in A$ siten, että $\mu(A \setminus \{a\}) = 0$.

7. Osoita, että jos μ:llä ei ole atomeja ja $0 < t < \mu(X) < \infty$, niin on olemassa $A \in \mathcal{M}$ siten, että $\mu(A) = t$.