

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 6
31.10.2013

Seuraavassa μ ja ν ovat Radon-mittoja \mathbb{R}^n :ssä.

1. Todista, että ylä- ja aladerivaatat $\overline{D}_\nu\mu$ ja $\underline{D}_\nu\mu$ ovat Borelin funktioita. Todistus löytyy osittain Holopaisen monisteesta, täydennä sitä.
2. Todista, että jos μ on absoluuttisesti jatkuva ν :n suhteen, niin

$$\int D_\nu\mu(x)^2 d\nu x = \int D_\nu\mu(x) d\mu x$$

- .
3. Todista, että $\underline{D}_\nu\mu < \infty$ μ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos μ on absoluuttisesti jatkuva ν :n suhteen.
 4. Todista, että $\overline{D}_\nu\mu = \infty$ μ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos μ ja ν ovat keskenään singulaariset.
 5. Olkoot $1 < p \leq \infty$ ja $f_i \in L^p(\mu), i = 1, 2, \dots$, siten, että $f_i \geq 0$ ja $\sup_i \int f_i^p d\mu < \infty$. Määritellään

$$\mu_i(E) = \int_E f_i d\mu,$$

kun E on μ -mitallinen joukko. Osoita, että jos jono (μ_i) suppenee heikosti kohti Radon-mittaa ν , niin ν on absoluuttisesti jatkuva μ :n suhteen.

6. Osoita, ettei edellisen tehtävän päätte, jos $p = 1$.

HUOM : Väliviikolla 24.-25.10. ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia.