Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 5
17.10.2013

Seuraavassa $\mathcal{D}_k, k \in \mathbb{Z}$, on dyadisten kuutioiden, joiden sivunpituus on 2^{-k}, perhe ja $\mathcal{D} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{D}_k$ sekä μ on Radon-mitta $\mathbb{R}^n$:ssä. Ts. $Q \in \mathcal{D}_k$, jos joillain $j_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n$,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : (j_i - 1)2^{-k} \leq x_i < j_i 2^{-k}, i = 1, \ldots, n\}.$$

1. Todista dyadinen Vitalin peitelause: Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu ja $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ siten, että jokainen A:n piste kuuluu mielivaltaisen pieneen $\mathcal{V}$:n kuutioon. Jos $\epsilon > 0$, on olemassa erilliset kuutiot $Q_1, Q_2, \dots \in \mathcal{V}$, joille

$$A \subset \bigcup_i Q_i \text{ ja } \sum_i \mu(Q_i) \leq \mu(A) + \epsilon.$$

2. Todista dyadinen tiheyspistelause: jos $A \subset \mathbb{R}^n$, niin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(A \cap Q_k(x))}{\mu(Q_k(x))} = 1$$

μ melkein kaikilla $x \in A$, missä $Q_k(x)$ on se $\mathcal{D}_k$:n kuutio, joka sisältää x:n.

3. Mitkä ovat pienimmät luvut $P(1)$ ja $Q(1)$, joilla Besicovitchin peitelause pätee $\mathbb{R}$:ssä?

4. Osoita, ettei Besicovitchin peitelause päde ääretönulotteisessa sisätuloavaruudessa.

5. Metrinen avaruus X on äärellisulotteinen, jos on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $x \in X$ ja $r > 0$ on olemassa $x_1, \ldots, x_N \in X$, joille

$$B(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, r).$$

Osoita, että jos X:ssä on tuplaava Borelin mitta μ, niin X on äärellisulotteinen. Mitan μ tuplaavuus tarkoittaa, että jollain vakiolla $C < \infty$ on $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$ kaikille $x \in X$ ja $r > 0$.

HUOM : Väliviikolla 24.-25.10. ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia.