Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 4
3.10.2013

1.Todista, että jos $A \subset \mathbb{R}^m$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ ovat kompakteja, niin (dim on Hausdorffin dimensio)

$$\dim A + \dim B \leq \dim(A \times B).$$

2. Todista Holopaisen monisteen lause 4.78 (käyttämällä lausetta 4.70).

3. Todista (käyttämättä lauseita 4.70 ja 4.78), että Rieszin kapasiteetille $C_s, s > 0$, pätee
(a) $C_s(\{x\}) = 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$,
(b) $C_s(A) < \infty$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu.

4. Osoita, että jos $K_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots,$ ovat kompakteja joukkoja siten, että $C_s(K_i) = 0$, niin $C_s(\cup_i K_i) = 0$.

5. Olkoot $\mu_j, j \in \mathbb{N}$, ja μ Radon-mittoja $\mathbb{R}^n$:ssä siten, että $\mu_j \to \mu$ heikosti. Todista, että kaikilla $s > 0$ on

$$I_s(\mu) \leq \liminf_{j \to \infty} I_s(\mu_j).$$

Vihje: Totea ensin, että on olemassa funktiot $g_k \in C_0(\mathbb{R})$ siten, että $0 \leq g_k(t) \leq |t|^{-s}$ ja $\lim_{k \to \infty} g_k(t) = |t|^{-s}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

6. Olkoot $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja $f : K \to \mathbb{R}$ jatkuva. Määritellään $M = \max_{x \in K} |f(x)|$ ja
$g(x) = \frac{1}{d(x,K)} \inf\{(f(y) + 2M)|x - y| - 2M : y \in K\}$, kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$,
$g(x) = f(x)$, kun $x \in K$.
Osoita, että g on jatkuva ja $g(x) = f(x)$, kun $x \in K$.

HUOM : 10-11.10. ei ole luentoja eikä laskuharjoituksia.