Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 3
26.9.2013

1.Osoita, että $\delta_{1/k}, k \in \mathbb{N}$, suppenee heikosti kohti δ_0:a, mutta joillekin Borelin joukoille $A \subset \mathbb{R}$ $\delta_{1/k}(A)$ ei suppene kohti $\delta_0(A)$:a. Tässä δ_a on Diracin mitta pisteessä $a \in \mathbb{R}$.

2. Olkoot $f_j \in L^1(\mathbb{R}^n), f_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \ldots$, siten, että $f_j \to f_0$ $L^1(\mathbb{R}^n)$:ssä. Määritellään $\mu_j(A) = \int f_j dm_n$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen. Osoita, että $\mu_j \to \mu_0$ heikosti.

3. Olkoot $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots$ jatkuvia funktioita siten, että $\mathrm{supp}(g_j) \subset B(0, 1/j)$ ja $\int g_j dm_n = 1$. Osoita, että jos μ on Radonin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä (eli $\mathbb{R}^n$:n Borelin joukkojen σ-algebrassa), niin mitat μ_j,

$$\mu_j(A) = \int_A \mu * g_j dm_n, A \in Bor(\mathbb{R}^n),$$

suppenevat heikosti kohti mittaa μ. Konvoluutio $\mu * f$ määritellään kaavalla

$$\mu * f(x) = \int f(x - y) d\mu y.$$

Seuraavassa X on $\mathbb{R}^n$:n kompakti osajoukko ja $\mathcal{M}$ on kaikkien X:n Radonin todennäköisyysmittojen (ts. $\mu(X) = 1$) joukko.
4. Osoita, että d,

$$d(\mu, \nu) = \sup\{|\int f d\mu - \int f d\nu| : f : X \to \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitz}\},$$

on metriikka $\mathcal{M}$:ssä. (f 1-Lipschitz: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ kaikille $x, y \in X$.)

5. Osoita, että jos $\mu_j, \mu \in \mathcal{M}$ ja $d(\mu_j, \mu) \to 0$, niin $\mu_j \to \mu$ heikosti.

6. Osoita, että jos $\mu_j, \mu \in \mathcal{M}$ ja $\mu_j \to \mu$ heikosti, niin $d(\mu_j, \mu) \to 0$.