Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 2
19.9.2013

1.Osoita, että Hausdorffin mitan $\mathcal{H}^s$ määritelmässä voidaan käyttää avoimien joukkojen peitteitä ja saadaan sama lopputulos.

2. Määritellään Hausdorffin kuulamitta $\mathcal{S}^s$ kuten Hausdorffin mitta, mutta käytetään peittävinä joukkoina kuulia. Osoita, että kaikilla $A \subset X$ on

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{S}^s(A) \leq 2^s \mathcal{H}^s(A).$$

3. Osoita, että kaikilla $0 < s < \infty$ ja kaikilla $0 < \delta \leq \infty$ on $\mathcal{H}^s(A) = 0$, jos ja vain jos $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$.

4. Osoita, että $\dim l^2 = \infty$, dim on Hausdorffin dimensio.

5. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha > 0$ ja vakiolla L, ts.

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y)^\alpha \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Osoita, että

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^{\alpha s}(A)$$

ja

$$\dim f(A) \leq \frac{1}{\alpha} \dim A$$

kaikilla $A \subset X$ ja kaikilla $0 \leq s < \infty$.

6. Osoita, että jos $A \subset X$ ja $0 \leq s < \infty$ ja on olemassa ulkomitta μ X:ssä siten, että $\mu(A) > 0$ ja $\mu(B(x,r)) \leq r^s$ kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$, niin $\mathcal{H}^s(A) > 0$.

7. Osoita, että $\dim \mathbb{R} = 2$, kun metriikka d $\mathbb{R}$:ssä määritellään siten, että

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}.$$