Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 11
5.12.2013

Nämä tehtävät saattavat olla tavallista vaativampia.

1. $\mathbb{R}^n$:n tiheystopologia on

$$\tau_d = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on Lebesgue-mitallinen ja } D(A,x) = 1 \ \forall x \in A\},$$

missä

$$D(A,x) = \lim_{r \to 0} \frac{m_n(A \cap B(x,r))}{m_n(B(x,r))},$$

kun raja-arvo on olemassa. Osoita, että τ_d on todella topologia. Huomaa, että tämä edellyttää, että τ_d:n joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat mitallisia.

2. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on approksimatiivisesti jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, jos on olemassa Lebesgue-mitallinen $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $D(A,x) = 1$ ja $\lim_{y \to x, y \in A} f(y) = f(x)$. Todista, että f on approksimatiivisesti jatkuva kaikissa $\mathbb{R}^n$:n pisteissä, jos ja vain jos se on jatkuva $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kun $\mathbb{R}^n$:ssä on tiheystopologia ja $\mathbb{R}$:ssä on tavallinen topologia.

3. Todista, että Lebesgue-mitallinen funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on approksimatiivisesti jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on

$$\lim_{r \to 0} \frac{m_n(\{y \in B(x,r) : |f(y) - f(x)| > \epsilon\})}{m_n(B(x,r))} = 0.$$

4. Todista, että $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on approksimatiivisesti jatkuva melkein kaikkialla, jos ja vain se on Lebesgue-mitallinen.
Vihje: Lusinin lause ja Lebesgue'n tiheyspistelause voivat auttaa.

TENTTI on 17.12.2013. Muista ilmoittautua.