Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 10
28.11.2013

1. Osoita, että $f \in BMO$, kun $f(x) = \log|x|, x \in \mathbb{R}^n$.

2. Onko $f \in BMO$, missä $f(x) = \log|x|$, kun $x \in \mathbb{R}, x > 0$, ja $f(x) = -\log|x|$, kun $x \in \mathbb{R}, x < 0$?

3. Osoita, että $f \notin BMO$, kun $f(x) = |\log|x||^p, x \in \mathbb{R}^n, 1 < p < \infty$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokaalisti integroituva siten, että on olemassa positiiviset vakiot C_1 ja C_2, joille pätee

$$m_n(\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > \lambda\}) \leq C_1 e^{-C_2\lambda} m_n(Q)$$

kaikille kuutioille $Q \subset \mathbb{R}^n$ ja kaikille $\lambda > 0$. Todista, että $f \in BMO$.

5. Todista, että jos $f \in BMO$, niin $f \in L^p_{lok}$ kaikilla $1 \leq p < \infty$ ja on olemassa vain n:stä ja p:stä riippuvat positiiviset vakiot c ja C siten, että

$$c\|f\|_* \leq \|f\|_{*,p} \leq C\|f\|_*,$$

missä

$$\|f\|_{*,p} = \sup\{\left(m_n(Q)^{-1}\int_Q |f - f_Q|^p\right)^{1/p} : Q \subset \mathbb{R}^n \text{ kuutio}\}.$$

TENTTI on 17.12.2013. Muista ilmoittautua.