Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi II
Harjoitus 1
12.-13.9.2013

1. Olkoon μ metrisen avaruuden X ulkomitta, jolle Borelin joukot ovat mitallisia. Todista, että μ on metrinen.

2. Olkoon μ joukon X ulkomitta ja $f : X \to Y$ mielivaltainen kuvaus. Määritellään kuvaulkomitta (push forward) asettamalla $f_{\#}\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$, kun $A \subset Y$. Osoita, että $f_{\#}\mu$ on ulkomitta siten, että $A \subset Y$ on $f_{\#}\mu$-mitallinen, kun $f^{-1}(A)$ on μ-mitallinen. Erityisesti $f_{\#}\mu$ on Borelin ulkomitta (eli Borelin joukot ovat mitallisia), jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, μ on Borelin ulkomitta ja f on jatkuva. Mitä vaikeuksia on määritelmässä $f^{\#}\nu(A) = \nu(f(A))$, kun $A \subset X$ ja ν joukon Y ulkomitta?

3. Olkoon μ metrisen avaruuden X ulkomitta. Määritellään μ:n kantaja (support)

$$spt\mu = X \setminus \bigcup\{V : V \subset X \text{ avoin ja } \mu(V) = 0\}.$$

Osoita, että

$$spt\mu = \{x \in X : \mu(B(x,r)) > 0 \text{ kaikilla } r > 0\}.$$

Osoita lisäksi, että jos X on separoituva (eli X:ssä on numeroituva tiheä osajoukko), niin $spt\mu$ on pienin suljettu joukko F, jolle $\mu(X \setminus F) = 0$. Päteekö tämä ilman separoituvuusoletusta?

4. Anna esimerkki $\mathbb{R}$:n Borelin ulkomitasta μ, jolle $\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{Q}) = 1$ ja μ:n kantaja on $\mathbb{R}$.

5. Olkoot X ja Y separoituvia metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ jatkuva. Osoita, että $f(spt\mu) \subset spt f_{\#}\mu$. Osoita lisäksi, että jos $spt\mu$ on kompakti, niin $f(spt\mu) = spt f_{\#}\mu$.