Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Avoimista joukoista ja avoimuuden määrittämisestä[1]

Tarkastelemme tässä monisteessa kurssin kannalta erittäin olennaista avoimuuden käsitettä ylimääräisten esimerkkien ja hieman kirjasta poikkeavien näkökulmien kautta. Palautetaan aluksi mieleen avoimen kuulan ja avoimen joukon määritelmät.

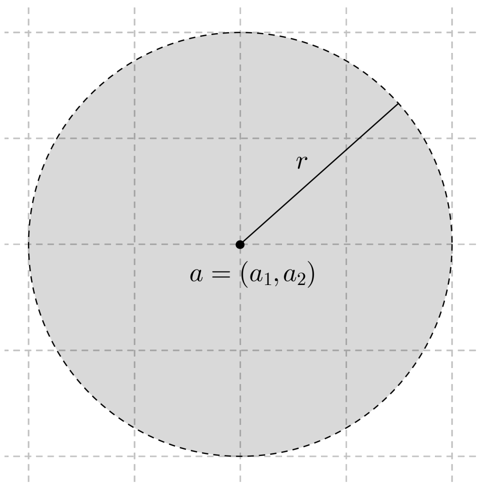
Määritelmä 1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $a \in X$ eräs piste ja $r > 0$. *Avoin a-keskeinen r-säteinen kuula* on joukko

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

Esimerkki 2. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja d joukon $\mathbb{R}^2$ tavallinen euklidinen metriikka. Tällöin kun merkitään $x = (x_1, x_2)$, niin pisteelle $a = (a_1, a_2)$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(a, x) < r \quad &\iff \quad \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2} < r \\ &\iff \quad (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 < r^2 \end{aligned}$$

Lukiogeometriasta muistamme, että yhtälö $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 = r^2$ määrittää r-säteisen ympyrän, jonka keskipiste on piste $a = (a_1, a_2)$. Siten $d(x, a) < r$ jos ja vain jos piste x on ympyräkehän $(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 = r^2$ sisäpuolella. Toisin sanoen, voimme piirtää kuulan $B(a, r)$ seuraavasti:

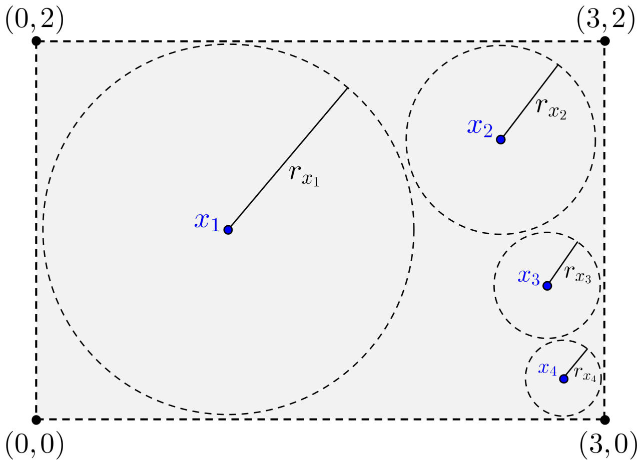


Kuva 1: Joukko $B(a, r)$ tasossa $\mathbb{R}^2$ tavallisen euklidisen metriikan suhteen.

[1]edellisen kerran muokattu 16.9.2013

Määritelmä 3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Sanomme, että joukko $A \subset X$ on *avoin*, jos jokaisella pisteellä $a \in A$ on olemassa sellainen luku $r_a > 0$, että $B(a, r_a) \subset A$.

Luku r_a (tai tarkemmin: luvun r_a pienin yläraja) riippuu merkinnän mukaisesti yleensä vahvasti pisteestä $a \in A$. Hahmotellaan tätä kuvassa joukon $C :=]0, 3[\times]0, 2[$ tapauksessa ennen tarkempaa todistusta sen avoimuudelle:



Kuva 2: Joukko $C =]0, 3[\times]0, 2[$, pisteet $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C$ ja eräät säteet $r_{x_1}, r_{x_2}, r_{x_3}$ ja r_{x_4}, joille pätee $B(x_i, r_{x_i}) \subset C$ jokaisella $i = 1, 2, 3, 4$.

Avoimen joukon määritelmä siis vaatii, että meidän tulisi löytää jokaisella joukon $a \in A$ pisteelle sellainen luku $r_a > 0$, että $B(a, r_a) \subset A$. Tämä voi kuulostaa kovin työläältä, sillä usein joukossa A on äärettömästi alkioita. Miten joukon avoimuus siis osoitetaan käytännössä määritelmästä lähtien? Tämä voidaan tehdä muutamassa vaiheessa:

i) kiinnitetään mielivaltainen piste $x \in A$;

ii) päätellään joukon A määritelmän perusteella, millainen luvun $r_x > 0$ tulisi olla;

iii) valitaan sopiva luku r_x;

iv) osoitetaan, että $B(x, r_x) \subset A$;

v) päätellään luvun x mielivaltaisuuden nojalla, että joukko A on avoin.

Etsimme siis ikään kuin säännön, jonka avulla voimme määrittää minkä tahansa joukon A alkion a tarvitseman luvun r_a. Tarkastellaan tästä esimerkkiä. Esimerkin puuttuvat yksityiskohdat täydennetään luennolla.

Esimerkki 4. Osoitetaan, että joukko $C =]0,3[\times]0,2[\subset \mathbb{R}^2$ on avoin tavallisen euklidisen metriikan suhteen käyttäen edellä mainittuja vaiheita.

i) Olkoon $(x,y) \in C$ mielivaltainen piste.

ii) Huomataan, että kuula $B((x,y), r_{(x,y)})$ ei saa sisältää yhtään joukon C komplementin pisteitä, jotta se sisältyy joukkoon C. Siten säteen $r_{(x,y)}$ pitää olla samanaikaisesti pienempi (tai yhtä suuri) kuin luvut x, $3-x$, y ja $2-y$ (katso Kuva 4 seuraavalla sivulla).

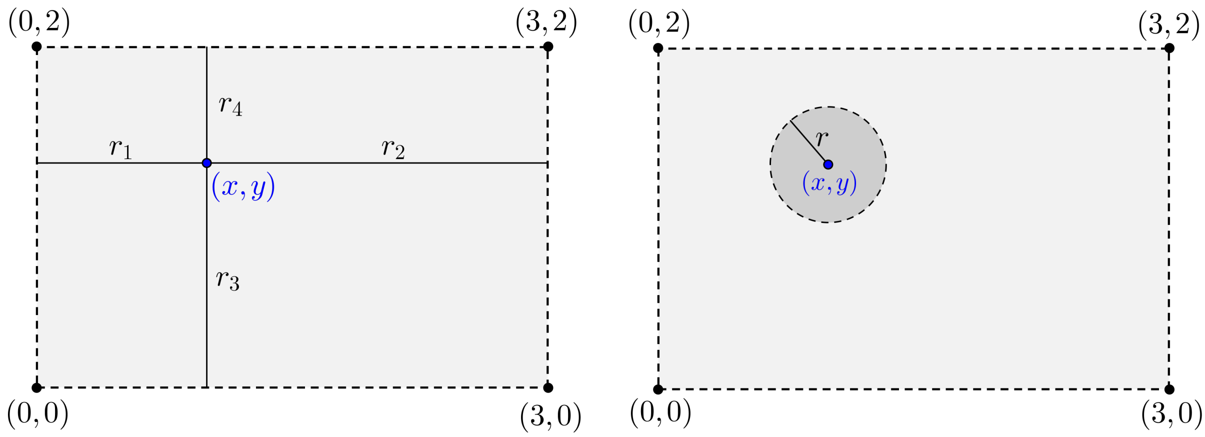
iii) Valitaan $r_{(x,y)} = \frac{1}{2}\min\{x, 3-x, y, 2-y\}$.

iv) Osoitetaan, että $B((x,y), r_{(x,y)}) \subset C$. Olkoon $(a,b) \in B((x,y), r_{(x,y)})$ mielivaltainen piste. Tällöin siis

$$d((x,y),(a,b)) < r_{(x,y)} \iff \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < r_{(x,y)}.$$

Huomataan heti, että

$$\begin{aligned} |a-x| &\leq \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < r_{(x,y)} \quad \text{ja} \\ |b-y| &\leq \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < r_{(x,y)}. \end{aligned}$$



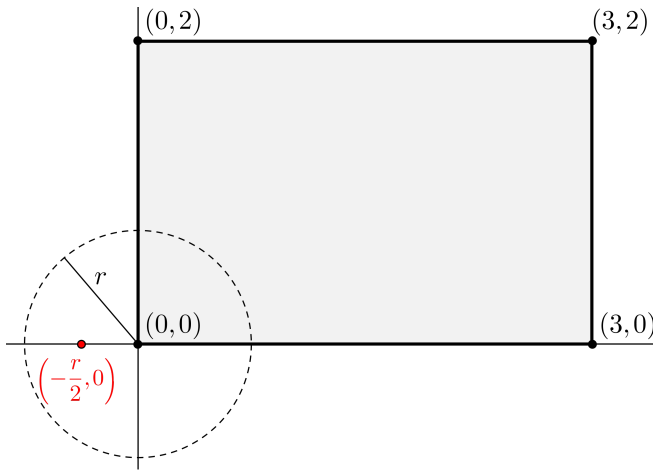
Kuva 3: Joukko $C =]0,3[\times]0,2[$ ja piste $(x,y) \in C$. Kun merkitään $r_1 = x, r_2 = 3-x, r_3 = y$ ja $r_4 = 2-y$ ja $r = \frac{1}{2}\min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, niin $B((x,y),r) \subset C$.

Joukko $]0,3[\times]0,2[$ on siis avoin euklidisessa metriikassa. Entäpä joukko $[0,3] \times [0,2]$? Osoitamme seuraavaksi, että kyseinen joukko ei ole avoin euklidisessa metriikassa. Kuten huomaamme, tämä saadaan tehtyä hyvinkin helposti.

Esimerkki 5. Joukko $D := [0,3] \times [0,2]$ ei ole avoin. Olkoon $r > 0$. Tällöin $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0),r)$, sillä

$$d\left(\left(-\frac{r}{2},0\right),(0,0)\right) = \sqrt{\left(-\frac{r}{2}-0\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{r}{2} < r.$$

Koska on voimassa $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \notin D$ kaikilla $r > 0$, niin samoin on voimassa $B((0,0),r) \not\subset D$ kaikilla $r > 0$. Siten joukko D ei ole avoin.



Kuva 4: Joukko $D = [0,3] \times [0,2]$ ei ole avoin, sillä on voimassa $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in B((0,0),r)$ kaikilla $r > 0$ ja $\left(-\frac{r}{2}, 0\right) \in D^c$ kaikilla $r > 0$.

Huomautus 6. Termit *avoin* ja *suljettu* eivät ole toistensa vastakohtia topologiassa. Jos joukko ei ole avoin, voidaan vain sanoa, että se on ei-avoin. Myöhemmin kun opimme, mitä termi suljettu joukko tarkoittaa, huomaamme, että joukko voi olla avoin muttei suljettu, suljettu muttei avoin, ei-avoin ja ei-suljettu tai jopa avoin ja suljettu.

Palatkaamme joukkoihin C ja D. Mikä tekee joukosta $C =]0,3[\times]0,2[$ avoimen ja joukosta $D = [0,3] \times [0,2]$ ei-avoimen? Joukkojen C ja D erona on joukko $D \setminus C = \{0,3\} \times [0,2] \cup \{0,2\} \times [0,3]$, joten jollakin tavalla tuo joukko vaikuttaa joukkojen C ja D avoimuuteen ja ei-avoimuuteen. Toisaalta kun tarkastelemme Esimerkkiä 5 uudestaan, sama todistus osoittaa, että joukko $C \cup \{(0,0)\}$ ei ole avoin. Siten *yksikin piste voi vaikuttaa joukon avoimuuteen.* Toisin sanoen:

> Jos joukossa H on yksikin piste $x \in H$, jolle on voimassa $B(x,r) \cap H^c \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$, joukko H ei ole avoin.

Tutkitaan tällaisia pisteitä, jotka "pilaavat joukon avoimuuden", hieman tarkemmin. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $H \subset X$. Määritellään joukon H *reuna* ∂H seuraavasti:

$$\partial H := \{x \in X \colon B(x,r) \cap H \neq \emptyset \text{ ja } B(x,r) \cap H^c \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\}.$$

Joukon H reuna siis sisältää kaikki ne avaruuden X pisteet, joiden jokainen kuulaympäristö kohtaa sekä joukon H että sen komplementin H^c. Huomataan heti, että on voimassa

$$\begin{aligned}
\partial(H^c) &= \{x \in X \colon B(x,r) \cap (H^c) \neq \emptyset \text{ ja } B(x,r) \cap (H^c)^c \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\} \\
&= \{x \in X \colon B(x,r) \cap H \neq \emptyset \text{ ja } B(x,r) \cap H^c \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\} \\
&= \partial H,
\end{aligned}$$

joten joukkojen H ja H^c reunat ovat samat.

Se, miten joukon reuna liittyy sen avoimuuteen, käy ilmi seuraavasta lauseesta, joka antaa jonkinlaista intuitiota avointen joukkojen luonteesta.

Lause 7. *Joukko $H \subset X$ on avoin jos ja vain jos $H \cap \partial H = \emptyset$.*

Todistus.

Esimerkki 8. Osoita, että seuraavat joukot eivät ole avoimia.

a) $\bar{B}(\bar{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (euklidinen metriikka)

b) $\{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^8$ (euklidinen metriikka)

c) $A := \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\} \subset C[0,1]$ (sup-normin määräämä metriikka)

Joukon osoittaminen ei-avoimeksi on usein helppoa määritelmästä lähtien, mutta joukon osoittaminen avoimeksi suoraan määritelmästä lähtien on usein hankalaa tai työlästä. Koska tarvitsemme avoimia joukkoja loppukurssilla paljon, todistamme myöhemmin joitakin näppäriä tuloksia, joiden avulla saamme osoitettua esimerkiksi, että joukko A,

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_7) \mid x_1^5 x_4 - x_2^3 + 7x_3 - x^5 < x_6^{24} + x_7\} \subset \mathbb{R}^7,$$

on avoin. Emme kuitenkaan voi todistaa näitä tuloksia vielä, sillä tarvitsemme niitä varten etenkin jatkuvan kuvauksen käsitteen.