Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Olli Tapiola
olli.tapiola@helsinki.fi

Infimumista ja supremumista[1]

Tässä materiaalissa kertaamme ja syvennämme lyhyesti infimumiin ja supremumiin liittyvää tietämystä. Osa materiaalista täydennetään loppuun luennoilla.

Vain äärellisen monta alkiota sisältävässä epätyhjässä reaalilukujoukossa on aina pienin (ja suurin) alkio: esimerkiksi joukon $\{1, 2, 3\}$ pienin alkio on 1 ja joukon $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/100\}$ pienin alkio on $1/100$. Äärettömän monta reaalilukua sisältävässä (alhaalta) rajoitetussa joukossa voi olla tai voi olla olematta pienin alkio: esimerkiksi välin $[3, 5]$ pienin alkio on 3, mutta joukossa $\{1, 1/2, 1/3, \ldots\} = \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ei ole pienintä alkiota. Kuitenkin aina voidaan puhua (rajoitetun) reaalilukujoukon *alarajoista*. Esimerkiksi jokaiselle joukon $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ alkiolle x on voimassa $x \geq -100$ ja $x \geq 0$, joten luvut -100 ja 0 ovat joukon $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ eräitä alarajoja. Näistä alarajoista puhuessa ollaan usein kiinnostuttu suurimmasta alarajasta:

Määritelmä 1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Joukon A *infimum* (merkitään $\inf A$) on joukon A *suurin alaraja*:

(1) $\inf A \leq a$ kaikilla $a \in A$;

(2) jos $\alpha \leq a$ kaikilla $a \in A$, niin $\inf A \geq \alpha$.

Ominaisuus (1) kertoo siis, että $\inf A$ on eräs joukon A alaraja, ja ominaisuus (2) kertoo, että $\inf A$ on tosiaan suurin kaikista joukon A alarajoista. Joukon A infimumin ei ole pakko kuulua joukkoon A, mutta jos se kuuluu, se on joukon A pienin alkio (eli minimi).

Jos joukko A ei ole alhaalta rajoitettu, merkitsemme $\inf A = -\infty$. Muussa tapauksessa $\inf A \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 2. Määritetään tarkasti joukon $]3, 7]$ infimum. Huomataan, että jokaiselle alkiolle $x \in]3, 7]$ on voimassa $x > 3$, joten 3 on eräs joukon $]3, 7]$ alaraja (ja siis $\inf]3, 7] \geq 3$). Olkoon sitten voimassa $\alpha \leq x$ kaikilla $]3, 7]$ (eli olkoon α eräs joukon $]3, 7]$ alaraja). Osoitetaan, että $\alpha \leq 3$. Tehdään vastaoletus: $\alpha > 3$. Siten $\varepsilon := \alpha - 3 > 0$. Kuitenkin tällöin

$$3 < 3 + \frac{\varepsilon}{2} < 3 + \varepsilon = \alpha,$$

mikä on ristiriita, sillä $3 + \varepsilon/2 \in]3, 7]$ (joten α ei olekaan joukon $]3, 7]$ alaraja). Siten $\alpha \leq 3$, joten erityisesti myös $\inf]3, 7] \leq 3$. Siten $\inf]3, 7] \leq 3 \leq \inf]3, 7]$, joten $\inf]3, 7] = 3$.

[1]edellisen kerran muokattu 04.09.2013

Esimerkki 3.

i) $\inf\{3, 28, -700, \pi\} =$

ii) $\inf[2, 5[\, =$

iii) $\inf\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi], f(x) = \sin x\} =$

iv) $\inf \mathbb{R} =$

v) $\inf\{x \in \mathbb{Z} \ : \ -\sqrt{8} < x < 2^{250}\} =$

Vastaavasti epätyhjässä reaalilukujoukossa voi olla tai voi olla olematta suurin alkio. Kuitenkin aina voidaan puhua (rajoitettujen) reaalilukujoukkojen *ylärajoista*. Näistä ylärajoista puhuttaessa ollaan usein kiinnostuttu pienimmästä ylärajasta:

Määritelmä 4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Joukon A *supremum* (merkitään $\sup A$) on joukon A *pienin yläraja*:

(1) $\sup A \geq a$ kaikilla $a \in A$;

(2) jos $\alpha \geq a$ kaikilla $a \in A$, niin $\sup A \leq \alpha$.

Samaan henkeen kuin infimumin tapauksessa ominaisuus (1) kertoo, että $\sup A$ on eräs joukon A yläraja, ja ominaisuus (2) kertoo, että $\sup A$ on pienin kaikista joukon A ylärajoista. Myöskään joukon A supremumin ei ole pakko kuulua joukkoon A, mutta jos se kuuluu, se on joukon A suurin alkio (eli maksimi).

Jos joukko A ei ole ylhäältä rajoitettu, merkitsemme $\sup A = \infty$. Muussa tapauksessa $\sup A \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 5.

i) $\sup\{3, 28, -700, \pi\} =$

ii) $\sup[2, 5[\, =$

iii) $\sup\{g(x) : x \in]1, \infty[, g(x) = 1/x\} =$

iv) $\sup \mathbb{R} =$

v) $\sup\{x \in \mathbb{Z} \ : \ -\sqrt{8} < x < 2^{250}\} =$

Kokoamme alle joitakin infimumin ja supremumin ominaisuuksia, joista on toisinaan hyötyä tällä kurssilla. Ominaisuudet seuraavat melko suoraan infimumin ja supremumin määritelmistä.

Lemma 6. *Olkoot* $A, B \subset \mathbb{R}$ *ja* $M \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

1) *jos* $A \subset B$, *niin* $\inf A \quad \inf B$;

2) *jos* $A \subset B$, *niin* $\sup A \quad \sup B$;

3) *jos* $a \in A$, *niin* $\inf A \quad a$;

4) *jos* $a \in A$, *niin* $\sup A \quad a$;

5) *jos* $a \geq M$ *jokaisella* $a \in A$, *niin* $\inf A \quad M$;

6) *jos* $a \leq M$ *jokaisella* $a \in A$, *niin* $\sup A \quad M$;

7) $\inf A = \sup A$ *jos ja vain jos* $\qquad\qquad$.