Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Toisen kurssikokeen ratkaisut ja arvosteluperusteet
Olli Tapiola
`olli.tapiola@helsinki.fi`

---

1. a) Määrittele käsitteet täydellinen metrinen avauus ja kompakti metrinen avauus.
   b) Ovatko seuraavat joukot täydellisiä tai kompakteja? Perustele!

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}. \end{aligned}$$

Ratkaisu. a) Metrinen avaruus on *kompakti*, jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

Metrisen avaruuden (X,d) jono (x_n) on *Cauchy*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kun $n, m \geq n_\varepsilon$. Avaruus (X,d) on *täydellinen* jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee.

b) Kurssin Lauseiden 12.5 ja 12.6 nojalla täydellisyyttä varten meidän riittää tarkistaa, ovatko joukot suljettuja, ja Lauseen 13.14 nojalla kompaktiutta varten meidän riittää tarkistaa, ovatko joukot suljettuja ja rajoitettuja.

Osoitetaan, että joukko A on kompakti ja täydellinen. Joukko $\{1\}$ on suljettu ja kuvaus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, on jatkuva, joten joukko $A = f^{-1}\{1\}$ on suljettu (Lauseen 6.13 nojalla) ja siten täydellinen. Toisaalta koska $x^2, y^2, z^2 \geq 0$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$, niin kaikilla $(x,y,z) \in A$ pätee

$$x^2, y^2, z^2 \in [0,1] \implies x, y, z \in [-1,1] \implies A \subset [-1,1]^3.$$

Erityisesti joukko A on rajoitettu. Siten joukko A on kompakti ja täydellinen.

Osoitetaan, että joukko B on täydellinen mutta ei kompakti. Joukko $\{1\}$ on suljettu ja kuvaus $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x + y + z$, on jatkuva, joten joukko $B = g^{-1}\{1\}$ on suljettu (Lauseen 6.13 nojalla) ja siten täydellinen. Toisaalta $(1,0,0) \in B$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $(x+1, -x, 0) \in B$. Nyt

$$d((x+1,-x,0),(1,0,0)) = \sqrt{(x+1-1)^2 + (-x)^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x| \to \infty,$$

kun $x \to \infty$, joten joukko B ei ole rajoitettu. Siten se ei myöskään ole kompakti.

$\square$

Arvostelusta

a-kohta
- $+$1,5p per määritelmä
- Täydellisyyden määritelmässä ei tarvinnut antaa Cauchyn jonon määritelmää.
- Epätäsmällisyyksistä (suljettu osajono, suppeneva kuvaus, jatkuva joukko tms.) sakotettiin tapauskohtaisesti.
- "suljettu ja rajoitettu" kompaktiuden määritelmänä antoi vain $+$0,5p.

b-kohta
- Lauseiden 12.5, 12.6 ja 13.14 käyttäminen $+$1p, joukko A $+$1p, joukko B $+$1p
- Pienistä virheistä tai huolimattomuuksista ei sakotettu, mutta esimerkiksi alkukuvan ottaminen muusta joukosta kuin yksiöstä, epätäsmälliset perustelut ja väärät johtopäätökset ($\mathbb{R}^3$ kompakti, kaikki $\mathbb{R}^3$:n osajoukot täydellisiä tms.) veivät pisteitä.

2. Mitkä seuraavista väittämistä ovat oikein ja mitkä väärin? Perustele! Pelkästä oikein/väärin-vastauksesta ei saa pisteitä.

   a) On olemassa sellainen metrinen avaruus (X, d) ja sellainen osajoukko $A \subset X$, että A on suljettu, rajoitettu ja täydellinen mutta ei kompakti.

   b) On olemassa suppeneva jono, joka ei ole Cauchy.

   c) Jono $(1/n)$ ei suppene $\{0, 1\}$-metriikan suhteen.

   d) Jono voi supeta, vaikka sillä ei ole yhtään kasautumisarvoa.

Ratkaisu. a) Väite on oikein. Varustetaan joukko $\mathbb{R}$ $\{0, 1\}$-metriikalla $d_{\{0,1\}}$ ja tutkitaan esimerkiksi joukkoa $[0, 1]$. Harjoitusten 6 tehtävässä 6 osoitettiin, että joukko $[0, 1]$ (ja mikä tahansa muukin joukko) on suljettu $\{0, 1\}$-metriikan suhteen ja puolestaan $\{0, 1\}$-metriikan määritelmän nojalla $d_{\{0,1\}}([0, 1]) = 1$, joten joukko on rajoitettu. Puolestaan $\{0, 1\}$-metriikan suhteen jokainen joukko on täydellinen (Harjoitustehtävät 9 tehtävän 6 ratkaisu). Kuitenkin koska joukko $[0, 1]$ sisältää äärettömän monta alkiota, niin se ei voi olla kompakti Harjoitustehtävien 11 tehtävän 4 ratkaisun nojalla.

b) Väite on väärin. Jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono (Lause 12.3), mutta jokainen Cauchyn jono ei välttämättä suppene.

c) Väite on oikein. Merkitään $x_n = 1/n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Huomataan, että $x_n \neq x_m$ aina kun $n \neq m$. Nyt siis kaikilla $n \neq m$ pätee

$$d_{\{0,1\}}(x_n, x_m) = 1,$$

joten jono (x_n) ei ole Cauchy ja siten se ei myöskään voi supeta.

d) Väite on väärin. Jos jonolla ei ole yhtään kasautumisarvoa, sillä ei voi olla yhtään suppenevaa osajonoa (Lause 11.18). Tällöin esimerkiksi Lauseen 11.17 nojalla jono ei voi supeta.

$\square$

Arvostelusta

- $+1{,}5$p per kohta

a-kohta Pelkkä toimivan esimerkin esittäminen antoi pisteet. Väärät johtopäätökset (suljettu ja rajoitettu on aina kompakti tms.) tai epämääräiset määritelmät (jatkuva joukko tms.) veivät pisteitä.

b-kohta Osa oli tuntunut lukevan väitteen muodossa “On olemassa Cauchyn jono, joka ei suppene.”, mikä vei valitettavasti väärille jäljille.

c-kohta Osa oli todennut, että jono $(1/n)$ on vakiojono $\{0, 1\}$-metriikassa, mikä vei kaikki pisteet, sillä tämä ei ole yksinkertaisesti totta. Metriikka ei vaikuta mitenkään siihen, onko jono vakiojono vai ei.

d-kohta Osalle kasautumisarvon määritelmä oli jäänyt hieman epäselväksi, mikä tuotti vääriä vastauksia.

3. Mitkä seuraavista joukoista ovat keskenään homeomorfisia? Anna joukkojen välinen homeomorfismi tai perustele, miksi joukot eivät voi olla homeomorfisia. Kaikissa joukoissa on käytössä euklidinen metriikka (tai sen rajoittuma).

$$[0,1] \qquad [0,1[\qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^2 \qquad [4,10] \qquad]0,1].$$

Ratkaisu. Joukot $[0,1]$ ja $[4,10]$ ovat homeomorfisia, sillä kuvaus $f_1\colon [0,1] \to [4,10]$, $f_1(x) = 6x + 4$, on haluttu homeomorfismi (sen käänteiskuvaus on $f_1^{-1}\colon [4,10] \to [0,1]$, $f_1^{-1}(x) = (x-4)/6$). Koska joukot $[0,1]$ ja $[4,10]$ ovat suljettuja ja rajoitettuja, ne ovat kompakteja (Lauseen 13.14 nojalla). Puolestaan joukot $[0,1[$ ja $]0,1]$ eivät ole suljettuja ja joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole rajoitettuja, joten ne eivät ole kompakteja. Koska kompaktius säilyy jatkuvissa kuvauksissa (Lause 13.18), joukot $[0,1]$ ja $[4,10]$ eivät ole minkään muun annetun joukon kanssa homeomorfisia.

Joukot $[0,1[$ ja $]0,1]$ ovat homeomorfisia, sillä kuvaus $f_2\colon [0,1[\to]0,1]$, $f_2(x) = 1-x$, on haluttu homeomorfismi (sen käänteiskuvaus on $f_2^{-1}\colon]0,1] \to [0,1[$, $f_2^{-1}(x) = x-1$). Ne eivät ole homeomorfisia joukkojen $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{R}^2$ kanssa:

- Joukko $[0,1[\setminus\{1/2\}$ on epäyhtenäinen (Lauseen 14.15 nojalla), mutta joukko $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{a}\}$ on yhtenäinen (jopa murtoviivayhtenäinen (Harjoitustehtävät 11 tehtävän 5 ratkaisu)) kaikilla $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$. Siten Seurauksen 14.17 nojalla joukot $[0,1[$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät voi olla homeomorfiset, koska muussa tapauksessa epäyhtenäinen joukko $[0,1[\setminus\{1/2\}$ olisi homeomorfinen jonkin yhtenäisen joukon $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{a}\}$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$, kanssa. Vastaavasti joukot $]0,1]$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfiset.
- Vastaavaan henkeen kuin edellä: joukko $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ on epäyhtenäinen Lauseen 14.15 nojalla kaikilla $a \in \mathbb{R}$, mutta joukot $[0,1[\setminus\{0\} =]0,1[$ ja $]0,1] \setminus \{1\} =]0,1[$ ovat yhtenäisiä, joten joukko $\mathbb{R}$ ei voi olla homeomorfinen joukon $]0,1]$ tai joukon $[0,1[$ kanssa.

Joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfiset, sillä - kuten edellä todettiin - joukko $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ on epäyhtenäinen kaikilla $a \in \mathbb{R}$, mutta joukko $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{a}\}$ on yhtenäinen kaikilla $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Arvostelusta

- joukot $[0,1]$ ja $[4,10]$ homeomorfisia +1p
- joukot $[0,1[$ ja $]0,1]$ homeomorfisia +1p
- joukko $[0,1]$ ei ole homeomorfinen joukkojen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $[0,1[$ ja $]0,1]$ kanssa +1p
- joukko $[0,1[$ ei ole homeomorfinen joukon $\mathbb{R}$ kanssa +1p
- joukko $[0,1[$ ei ole homeomorfinen joukon $\mathbb{R}^2$ kanssa +1p
- joukot $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfiset +1p
- Homeomorfismi piti antaa selkeänä lausekkeena, jos se ole olemassa.
- Esimerkiksi joukkojen $[0,1]$ ja $[0,1[$ ei-homeomorfisuuden perusteluun ei kelvannut se, että toinen joukoista on suljettu ja toinen ei, sillä joukko $[0,1[$ on suljettu ja avoin joukossa $[0,1[$. Sen sijaan kompaktiudella tai yhtenäisyydellä perustelu kelpasi.
- Useimmat kohdat pystyi perustelemaan yhtenäisyydellä, mutta yhtenäisyys tai kompaktius ei kelvannut perusteluksi homeomorfisuudelle.

4. Osoita, että jono $\cos(x), \cos(\cos(x)), \cos(\cos(\cos(x))), \ldots$ suppenee jokaisella $x \in [0, 1]$.

Ratkaisu. Huomataan, että $\cos[0, 1] = [\cos 1, 1] \subset [0, 1]$, joten voidaan tarkastella kuvausta $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \cos(x)$. Koska funktio f on jatkuva ja dervioituva, niin väliarvolauseen nojalla kaikilla $x, y \in [0, 1]$, $x < y$, on olemassa sellainen $\xi_{x,y} \in \,]x, y[$, että

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi_{x,y})||x - y| \leq \sin(1)|x - y|.$$

Koska $\sin(1) < 1$, niin kuvaus f on kontraktio. Koska joukko $[0, 1]$ on suljettu, niin (Lauseen 12.6 nojalla) se on täydellinen. Siten Banachin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste $a \in [0, 1]$ (jolle siis $f(a) = a$) ja jokaisella $x \in [0, 1]$ pätee, että jono

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

suppenee kohti pistettä a. Erityisesti siis jono $\cos(x), \cos(\cos(x)), \cos(\cos(\cos(x))), \ldots$ suppenee jokaisella $x \in [0, 1]$. $\square$

Arvostelusta

- Banachin kiintopistelauseen käyttäminen +1,5p
- joukon $[0, 1]$ toteaminen täydelliseksi +1p
- kuvauksen $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \cos(x)$, osoittaminen kontraktioksi +2p
- jonon suppenemisen perustelu +1,5p
- Tehtävässä oli tosiaan tarkoituksena soveltaa Banachin kiintopistelausetta. Osa yritti ratkaista tehtävää suoraan suppenemisen määritelmän kautta, mutta tämä johti virheellisiin argumentteihin, joissa suppeneminen ja jatkuvuus menivät sekaisin tai yritettiin käyttää projektiokuvauksia, jotka eivät liittyneet tähän tehtävään.

5. a) Määrittele käsite topologinen avaruus.

b) Anna jokin joukon $\{1, 2, 3\}$ topologia, jolle on voimassa: pisteillä 1 ja 2 on olemassa erilliset ympäristöt, mutta pisteillä 2 ja 3 ei ole erillisiä ympäristöjä.

c) Anna jokin joukon $\mathbb{R}$ topologia, jolle on voimassa: millään kahdella pisteellä ei ole erillisiä ympäristöjä.

Ratkaisu. a) Olkoon X jokin joukko. Joukon X *topologia* τ on sellainen kokoelma joukon X osajoukkoja (eli $\tau \subset \mathcal{P}(X)$), että ehdot

(T1) $U_i \in \tau, i \in I \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ (eli τ sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet)

(T2) $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau$ (eli τ sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset)

(T3) $X, \emptyset \in \tau$

ovat voimassa. Paria (X, τ) sanotaan *topologiseksi avaruudeksi* ja kokoelman τ alkioita sanotaan avoimiksi joukoiksi.

b) Esimerkiksi kokoelma $\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ on joukon $\{1, 2, 3\}$ topologia, jossa kaikki pisteen 3 ympäristöt (eli joukot $\{2, 3\}$ ja $\{1, 2, 3\}$) sisältävät pisteen 2. Siten pisteillä 2 ja 3 ei ole erillisiä ympäristöjä avaruudessa (X, τ_1).

c) Esimerkiksi kokoelma $\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ on joukon $\mathbb{R}$ topologia, jossa pisteillä ei ole erillisiä ympäristöjä (koska jokaisen pisteen ainut ympäristö on koko joukko $\mathbb{R}$).

$\square$

Arvostelusta

- jokainen kohta +2p

a-kohta Useampi oli vastannut, että topologian tulee sisältää äärellisen yhdisteet ja mielivaltaiset leikkaukset, mikä muutti määritelmää. Puolestaan osa ei ollut maininnut leikkausten ja yhdisteiden luonteesta. Nämä asiat vähensivät pisteitä tapauskohtaisesti.

b&c-kohdat Pelkästään esimerkin antaminen antoi pisteet. Virheistä vähennettiin pisteitä tapauskohtaisesti.

6. a) Osoita, että Lipschitz-kuvaus on tasaisesti jatkuva.
   b) Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva mutta ei tasaisesti jatkuva.

Ratkaisu. a) Olkoon $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ M-Lipschitz-kuvaus, $M \geq 0$. Jos $M = 0$, niin kuvaus f on vakiokuvaus ja siten tasaisesti jatkuva. Voidaan siis olettaa, että $M > 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_\varepsilon = \varepsilon/M$. Nyt jos $d(x,y) < \delta_\varepsilon$, niin

$$d'(f(x), f(y)) \leq Md(x,y) < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Siten (koska δ_ε ei riipu pisteistä x ja y) kuvaus f on tasaisesti jatkuva avaruudessa X

b) Tarkastellaan kuvausta $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$. Kurssin Analyysi I (tai periodin I) nojalla tiedämme, että kuvaus g on jatkuva. Osoitetaan, että se ei ole tasaisesti jatkuva. Tehdään vastaoletus: g on tasaisesti jatkuva. Olkoon $\delta_1 > 0$ se luku, jolle $|g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| < 1$ kun $|x - y| < \delta_1$. Nyt

$$\left|\frac{1}{\delta_1} - \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2}\right)\right| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1,$$

mutta

$$\begin{aligned}
\left|g\left(\frac{1}{\delta_1}\right) - g\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{1}{\delta_1^2} - \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{\delta_1}{2}\right)^2\right| \\
&= \left|\frac{1}{\delta_1^2} - \frac{1}{\delta_1^2} - 2\frac{1}{\delta_1}\frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_1^2}{4}\right| \\
&= 1 + \frac{\delta_1^2}{4} \\
&> 1,
\end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siis kuvaus g ei ole tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

□

Arvostelusta

a-kohta +3p

- Pelkästä Lipschitz-kuvauksen määritelmän antamisesta ei saanut pisteitä, sillä kyseisen asian osaamista testattiin jo edellisessä kokeessa.
- Isommat epätarkkuudet merkinnöissä ja loogisen rakenteen virheet (delta valitaan ennen epsilonia tms.) vähensivät pisteitä tapauskohtaisesti.

b-kohta +3p

- Toimivan esimerkin antaminen antoi +1,5p, perustelut antoivat 0-1,5p.
- Pienistä virheistä (merkkivirheet tms.) ei sakotettu.

7. a) Osoita, että kahden konveksin joukon leikkaus on konveksi.

b) Millainen joukon X tulee olla, jotta metrinen avaruus $(X, d_{\{0,1\}})$ on yhtenäinen, kun $d_{\{0,1\}}$ on joukon X $\{0,1\}$-metriikka? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu. a) Olkoot A ja B konvekseja joukkoja normiavaruudessa E. Voidaan olettaa, että $A \cap B \neq \emptyset$, koska muussa tapauksessa leikkausjoukko $A \cap B$ on tyhjänä joukkona konveksi. Olkoot $u, v \in A \cap B$. Muodostetaan pisteiden u ja v välinen janapolku: $\alpha \colon [0,1] \to E$,

$$\alpha(t) = (1-t)u + tv.$$

Koska $u, v \in A$ ja A on konveksi, niin $\alpha(t) \in A$ kaikilla $t \in [0,1]$. Toisaalta koska $u, v \in B$ ja B on konveksi, niin $\alpha(t) \in B$ kaikilla $t \in [0,1]$. Siis $\alpha(t) \in A \cap B$ kaikilla $t \in [0,1]$, joten joukko $A \cap B$ on konveksi.

b) Osoitetaan, että metrinen avaruus $(X, d_{\{0,1\}})$ on yhtenäinen jos ja vain jos $\#X \leq 1$. Jos $\#X \leq 1$, niin joukko X on tyhjä joukko tai yksiö, jolloin X on yhtenäinen, koska se ei sisällä kahta erillistä epätyhjää osajoukkoa.

Oletetaan sitten, että $\#X \geq 2$. Olkoon $a \in X$. Merkitään $A = \{a\}$ ja $B = X \setminus \{a\}$. Tällöin koska

$$A = \{a\} = B\left(a, \frac{1}{2}\right)$$

ja

$$B = \bigcup_{x \neq a} B\left(a, \frac{1}{2}\right),$$

niin joukot A ja B ovat avoimia, erillisiä, epätyhjiä ja $A \cup B = X$, joten avaruus $(X, d_{\{0,1\}})$ ei ole yhtenäinen.

$\square$

Arvostelusta

a-kohta +3p

- Tarkalla sanallisella perustelulla saattoi saada liki täydet pisteet.
- Vääristä määritelmistä ja puutteellisista perusteluista sakotettiin tapauskohtaisesti.

b-kohta +3p

- yli kaksi alkiota sisältävä joukko ei voi olla yhtenäinen +2p
- korkeintaan yhden alkion sisältävä joukko on yhtenäinen +1p

8. a) Määritä joukon $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ reuna.

b) Anna esimerkit joukoista A ja B, joille on voimassa

$$\partial\partial A = \partial A \qquad \text{ja} \qquad \partial\partial B \neq \partial B.$$

Ratkaisu. a) Olkoon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja olkoon $r > 0$. Kurssin Analyysi I nojalla nyt on olemassa sellaiset luvut $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ja $s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, että

$$\begin{aligned} q_1, s_1 &\in \left]x, x + \frac{r}{2}\right[\quad \text{ja} \\ q_2, s_2 &\in \left]y, y + \frac{r}{2}\right[. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (q_1, q_2)\| &= \sqrt{(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2} \\ &\leq \sqrt{(x - q_1)^2} + \sqrt{(y - q_2)^2} \\ &= |x - q_1| + |y - q_2| \\ &< \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\|(x, y) - (s_1, s_2)\| < r.$$

Erityisesti siis $(q_1, q_2) \in B((x, y), r) \cap \mathbb{Q}^2$ ja $(s_1, s_2) \in B((x, y), r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2)$, joten $B((x, y), r) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$ ja $B((x, y), r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2) \neq \emptyset$. Siten $(x, y) \in \partial\mathbb{Q}^2$, joten $\mathbb{R}^2 \subset \partial\mathbb{Q}^2$ ja siis $\partial\mathbb{Q}^2 = \mathbb{R}^2$.

b) Olkoon $A = [0, 1]$. Nyt kaikilla $r > 0$ pätee $0 \in B(0, r) \cap A$, $-r/2 \in B(0, r) \cap A^c$, $1 \in B(1, 1) \cap A$ ja $1 + r/2 \in B(1, 1) \cap A^c$, joten $\{0, 1\} \subset \partial A$. Toisaalta koska $]0, 1[\subset A$ on avoin, niin $]0, 1[\subset \text{int} A$, joten $\partial A = \{0, 1\}$. Vastaavasti $\partial\{0, 1\} = \{0, 1\}$, joten $\partial\partial A = \partial A = \{0, 1\}$.

Olkoon $B = \mathbb{Q}$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Nyt kurssin Analyysi I nojalla pätee $]x - r, x + r[\cap B \neq \emptyset$ ja $]x - r, x + r[\cap B^c \neq \emptyset$, joten $\partial B = \mathbb{R}$. Koska $\partial\partial\mathbb{R} = \emptyset$, niin nyt $\partial\partial B = \emptyset \neq \mathbb{R} = \partial B$.

□

Arvostelusta

a-kohta +3p

- Reunajoukon päätteleminen oikein antoi +0,5p.
- Reaalilukujen ominaisuuksien soveltaminen oikein ja reunan määritelmän käyttäminen antoivat loput +2,5p.
- Virheelliset argumentit (kuten reunajoukon päätteleminen reunojen karteesisen tulon avulla) vähensivät pisteitä tapauskohtaisesti.

b-kohta +3p

- Toimivat esimerkit antoivat täydet pisteet, tarkkoja perusteluja ei vaadittu.