Opettajalinjan työpaja: Topologia I, syksy 2013
Toinen välikoe
12.12.2013
Koeaika 2 tuntia.

- Vastaa seuraavista kysymyksistä **enintään neljään**. Mikäli vastaat useampaan kuin neljään kysymykseen, arvostelussa otetaan huomioon vain neljä heikoiten mennyttä tehtävää ja kokonaispistemäärästä vähennetään yksi piste jokaisesta ylimääräisenä tehdystä tehtävästä.
- Tehtävissä saa käyttää kurssilla käsiteltyjä lauseita (ellei tehtävässä juurikin pyydetä todistamaan jotakin näistä lauseista) ja kurssin Analyysi I tuloksia. Periodin I tulosten nojalla saa todeta polynomikuvaukset, projektiot, jatkuvien kuvausten yhdisteet ja vastaavat jatkuviksi. Suljetut välit ja niiden karteesiset tulot saa todeta suljetuiksi ja avoimet välit ja niiden karteesiset tulot avoimiksi ilman tarkempia todistuksia.
- Huomaa, että tehtäviä löytyy paperin kummaltakin puolelta.

---

1. a) Määrittele käsitteet täydellinen metrinen avauus ja kompakti metrinen avauus.
   b) Ovatko seuraavat joukot täydellisiä tai kompakteja? Perustele!

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\} \\ B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}. \end{aligned}$$

2. Mitkä seuraavista väittämistä ovat oikein ja mitkä väärin? Perustele! Pelkästä oikein/väärin-vastauksesta ei saa pisteitä.
   a) On olemassa sellainen metrinen avaruus (X,d) ja sellainen osajoukko $A \subset X$, että A on suljettu, rajoitettu ja täydellinen mutta ei kompakti.
   b) On olemassa suppeneva jono, joka ei ole Cauchy.
   c) Jono $(1/n)$ ei suppene $\{0,1\}$-metriikan suhteen.
   d) Jono voi supeta, vaikka sillä ei ole yhtään kasautumisarvoa.

3. Mitkä seuraavista joukoista ovat keskenään homeomorfisia? Anna joukkojen välinen homeomorfismi tai perustele, miksi joukot eivät voi olla homeomorfisia. Kaikissa joukoissa on käytössä euklidinen metriikka (tai sen rajoittuma).

$$[0,1] \qquad [0,1[\qquad \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^2 \qquad [4,10] \qquad]0,1].$$

4. Osoita, että jono $\cos(x), \cos(\cos(x)), \cos(\cos(\cos(x))), \ldots$ suppenee jokaisella $x \in [0,1]$.

5. a) Määrittele käsite topologinen avaruus.
   b) Anna jokin joukon $\{1,2,3\}$ topologia, jolle on voimassa: pisteillä 1 ja 2 on olemassa erilliset ympäristöt, mutta pisteillä 2 ja 3 ei ole erillisiä ympäristöjä.
   c) Anna jokin joukon $\mathbb{R}$ topologia, jolle on voimassa: millään kahdella pisteellä ei ole erillisiä ympäristöjä.

6. a) Osoita, että Lipschitz-kuvaus on tasaisesti jatkuva.
   b) Anna esimerkki funktiosta, joka on jatkuva mutta ei tasaisesti jatkuva.

7. a) Osoita, että kahden konveksin joukon leikkaus on konveksi.
   b) Millainen joukon X tulee olla, jotta metrinen avaruus $(X, d_{\{0,1\}})$ on yhtenäinen, kun $d_{\{0,1\}}$ on joukon X $\{0,1\}$-metriikka? Perustele vastauksesi.

8. a) Määritä joukon $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ reuna.
   b) Anna esimerkit joukoista A ja B, joille on voimassa

$$\partial\partial A = \partial A \qquad \text{ja} \qquad \partial\partial B \neq \partial B.$$